



## ОПИСАНИЕ И ПАРАМЕТРЫ МОДЕЛЕЙ А.И. БОТКИНА И Ю.К. ЗАРЕЦКОГО

### МИРНЫЙ А.Ю.

Доцент геологического факультета МГУ имени М.В. Ломоносова, генеральный директор ООО «Независимая геотехника», к. т. н., г. Москва, Россия  
info@indep-geo.ru

### МОСИНА А.С.

Научный сотрудник лаборатории изучения состава и свойств грунтов ИГЭ РАН, заместитель генерального директора ООО «Независимая геотехника», к. г.-м. н., г. Москва, Россия  
Mosina.A.S@yandex.ru

### АННОТАЦИЯ

Издательство журнала «Геоинфо» подготовило к печати и передало в типографию книгу «Математические модели грунтов для инженеров» (авторы – А.Ю. Мирный и А.С. Мосина), объемом более 400 страниц. Эта монография, задуманная в первую очередь как практический справочник, содержит в себе необходимую теоретическую информацию по теории упругости, пластичности и ползучести, а также сведения о более чем 30 моделях, реализованных в наиболее популярных геотехнических расчетных комплексах, об их областях применения и методиках определения параметров. На эту книгу получены положительные отзывы профессоров Г.Г. Болдырева и А.Г. Шашкина. Приобрести данное издание можно будет уже в октябре 2024 года, отправив заявку на адрес электронной почты sale@indep-geo.ru. С актуальным содержанием данной монографии можно ознакомиться по ссылке <https://disk.yandex.ru/d/X-INTOKrwOC2-A>.

Чтобы дать читателям представление о стиле изложения и содержании этой книги, мы, с согласия авторов, решили опубликовать фрагменты из нее в серии статей. В данной статье описывается модель, основанная на аналитических решениях А.И. Боткина, и модель, предложенная Ю.К. Зарецким.

### КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА:

математическая модель; модель А.И. Боткина; модель Ю.К. Зарецкого; модель Гука; паспорт прочности; гиперболический закон деформирования; сдвиговая деформация; пластическая деформация; напряжение; поверхность прочности; поверхность текучести; условие прочности Мизеса – Шлейхера – Боткина.

### ССЫЛКА ДЛЯ ЦИТИРОВАНИЯ:

Мирный А.Ю., Мосина А.С. Описание и параметры моделей А.И. Боткина и Ю.К. Зарецкого // Геоинфо. 2024. Т. 6. № 9. С. 26–30. DOI:10.58339/2949-0677-2024-6-9-26-30.

# DESCRIPTION AND PARAMETERS OF A.I. BOTKIN AND YU.K. ZARETSKIY MODELS

## MIRNYY A.Yu.

Associate professor at the Faculty of Geology of Lomonosov Moscow State University, the head of "Independent Geotechnics" LLC, PhD, Moscow, Russia  
nfo@indep-geo.ru

## MOSINA A.S.

Researcher at the Laboratory for Studying the Composition and Properties of Soils, Sergeev Institute of Environmental Geoscience, Russian Academy of Science; the deputy general director of "Independent Geotechnics" LLC, PhD, Moscow, Russia  
Mosina.A.S@yandex.ru

## ABSTRACT

The publishing house of the "GeoInfo" journal has prepared for printing the book "Mathematical models of grounds for engineers" (by A.Yu. Mirnyy and A.S. Mosina) with a volume of more than 400 pages and handed it over to a printing house. This monograph, (which was conceived primarily as a practical reference book) contains the necessary theoretical information on the theory of elasticity, plasticity and creep, as well as the information about more than 30 models implemented in the most popular geotechnical computational softwares, about their fields of application and methods for determining parameters. This book received positive reviews from professors G.G. Boldyrev and A.G. Shashkin. You will be able to purchase the book in October 2024 by sending an application to the next email address: sale@indep-geo.ru. The current contents of this monograph can be found at the next web link: <https://disk.yandex.ru/d/X-IHTOKrwOC2-A>.

To provide insight into the style of presentation and the content of the book for the readers, we decided to publish some fragments from it (with the consent of the authors) in a series of articles. This article describes the model based on analytical solutions by A.I. Botkin and the model proposed by Yu.K. Zaretskiy.

## KEYWORDS:

mathematical model; A.I. Botkin model; Yu.K. Zaretskiy model; Hooke model; strength certificate; hyperbolic law of deformation; shear strain; plastic strain; stress; strength surface; yield surface; Mises-Schleicher-Botkin strength condition.

## FOR CITATION:

Mirnyy A.Yu., Mosina A.S. Opisaniye i parametry modeley A.I. Botkina i Yu.K. Zaretskogo [Description and parameters of A.I. Botkin and Yu.K. Zaretskiy models] // GeoInfo. 2024. Vol. 6. № 9. S. 26–30. DOI:10.58339/2949-0677-2024-6-9-26-30 (in Rus.).

Вероятно, исторически первой моделью, использующей гиперболический закон деформирования, была так называемая модель А.И. Боткина, основанная на аналитических решениях, опубликованных А.И. Боткиным в конце 30-х – начале 40-х годов XX века [1, 2]. Эти публикации предшествовали значительно более известным в зарубежной литературе работам Р. Конднера [3, 4], кроме этого, содержали некоторые решения, позволяющие развить модель с применением положений теории пластичности. Предложенная А.И. Боткиным математическая модель помимо удачной аппроксимации экспериментально наблюдаемых зависимостей содержит еще и условие прочности в инвариантной форме. К сожалению, современному специалисту эта модель практически не известна и упоминается только в работах отдельных исследователей, например А.Н. Алехина [5]. В данном разделе описание модели приводится на основании публикаций этого автора.

По существу, модель А.И. Боткина является обобщением модели Гука, но с нелинейными значениями модулей объемного сжатия  $K$  и сдвига  $G$ . Выбор именно этих констант упругости вместо более привычных модуля общей деформации  $E$  и коэффициента относительного поперечного расширения  $\nu$  представляется значительно более обоснованным для дисперсных грунтов, так как их объемная и сдвиговая жесткость обусловлены принципиально разными механизмами. Объемное сжатие связано с уменьшением объема порового пространства – следовательно, с ростом средних напряжений объемная жесткость возрастает:

$$K = \frac{\sigma_m}{\varepsilon} = A_0 \sigma_m^{1-\alpha}, \quad (1)$$

где  $A_0$  – безразмерный параметр, определяющий величину объемной жесткости;  $\sigma_m$  – среднее напряжение;  $\varepsilon$  – средняя относительная деформация;  $\alpha$  – безразмерный параметр степенной функции, близкий по смыслу параметру  $a$  в работах Н. Янбу [6].

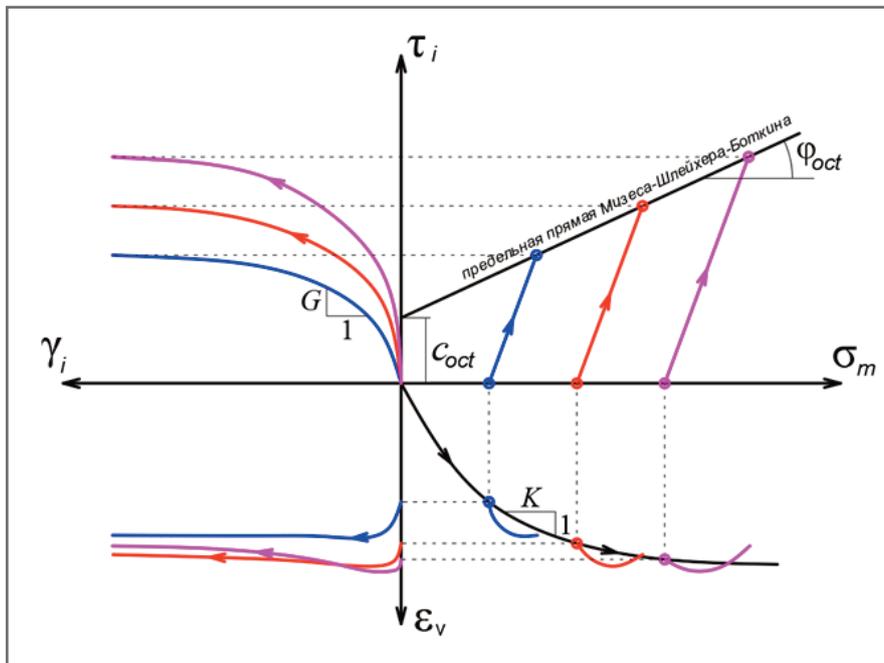
Сдвиговое деформирование сопровождается взаимным смещением частиц скелета и в пределе приводит к разрушению, поэтому по мере накопления дефектов структуры сдвиговая жесткость снижается. В модели А.И. Боткина для этого используется гиперболический закон:

$$G = \frac{\sigma_i}{\gamma_i} = \frac{\sigma_u}{B + \gamma_i}, \quad (2)$$

где  $B$  – безразмерный параметр, определяющий начальную сдвиговую жесткость;  $\sigma_i$  – интенсивность напряжений;  $\sigma_u$  – предельное значение интенсивности напряжений;  $\gamma_i$  – интенсивность деформаций сдвига.

Предельное напряжение  $\sigma_u$  определяется в соответствии с условием прочности Мизеса – Шлейхера – Боткина.

Следует отметить, что у различных авторов встречаются различные формы записи, не меняющие существа модели, в частности вместо средних напряжений и деформаций могут использоваться первые инварианты тензора напря-



**Рис. 1.** Паспорт прочности грунта (графическое представление модели А.И. Боткина). Цветом выделены зависимости, соответствующие одному опыту; черным показаны зависимости, полученные по совокупности опытов

жений и деформаций соответственно, вместо интенсивности – вторые инварианты. Эти расхождения в формулировках приводят только к изменениям в величинах коэффициентов модели.

Традиционно математическая модель А.И. Боткина отображается в виде так называемого паспорта прочности – диаграммы, включающей в себя ряд зависимостей инвариантов напряжений и деформаций, а также предельную прямую (рис. 1). Это построение объединяет на одной координатной плоскости зависимости между напряжениями, инвариантами напряжений, объемными и сдвиговыми деформациями:

I квадрант: траектория нагружения, зависимость интенсивности касательных напряжений от среднего напряжения, предельная прямая. Каждый единственный опыт трехосного сжатия отображается в виде траектории нагружения, по предельным точкам можно построить предельную прямую (либо огибающую, если используется нелинейное условие прочности);

- I квадрант: зависимость интенсивности деформаций сдвига от интенсивности касательных напряжений. Для каждого единичного опыта трехосного сжатия могут быть получены свои параметры нелинейного деформирования. Видно, как жесткость меняется с ростом среднего напряжения;

- III квадрант: зависимость интенсивности деформаций сдвига от объемных деформаций, дилатансия и контракция.

В этом квадранте каждый опыт трехосного сжатия позволяет получить значение угла дилатансии. Хорошо видно, что с ростом средних напряжений за счет уплотнения скелета грунта дилатансия возрастает. Дальнейшее увеличение среднего напряжения будет, наоборот, приводить к снижению дилатансии, так как объемному расширению будет препятствовать действующее всестороннее давление;

- IV квадрант: зависимость объемных деформаций от среднего напряжения, дилатансия и контракция. В этом квадранте точка окончания консолидации в каждом единичном опыте – это точка на компрессионной кривой, по совокупности опытов ее можно построить полностью. При девиаторном нагружении каждый опыт представляется в виде дополнительного участка зависимости, отражающего дилатансию или контракцию.

Насколько известно авторам, в настоящее время модель А.И. Боткина в оригинальном виде не реализована в каких-либо распространенных численных программных комплексах. Тем не менее ее развитие представляется перспективным в связи с простотой и рациональностью используемых зависимостей.

Определение параметров модели А.И. Боткина, учитывая феноменологический характер используемых зависимостей, следует проводить путем подбора значений для достижения наилучшей

аппроксимации экспериментальных кривых.

Применительно к крупнообломочным грунтам, используемым в качестве оснований и материалов гидротехнических сооружений, Ю.К. Зарецким гиперболический закон применялся для описания как объемного, так и сдвигового деформирования. Данная модель во многом напоминает модель А.И. Боткина, но обладает расширенными функциональными возможностями. Модель подробно описана в работах Ю.К. Зарецкого и его учеников [7, 8]. К сожалению, широкого применения модель не нашла, однако по сведениям авторов, реализована в качестве пользовательской модели в ПК ANSYS и применяется единичными специалистами при проектировании земляных плотин.

В отличие от модели Duncan-Chang, для описания жесткости использовался не линейный модуль деформации, а модули сдвига и объемного сжатия. Кроме того, использовались инвариантные величины компонентов НДС – интенсивность касательных напряжений и деформаций сдвига. В результате закон деформирования записывался следующим образом:

$$\begin{aligned} \frac{\tau_i}{\tau_i^*} &= \frac{\gamma_i}{A + B \cdot \gamma_i}, \\ \varepsilon_v &= \frac{\sigma_m}{a + b \cdot \sigma_m}. \end{aligned} \quad (3)$$

Коэффициенты  $A$ ,  $B$  и  $a$ ,  $b$  предполагалось определять непосредственно по результатам испытаний осесимметричного трехосного сжатия. Интересно отметить, что в данной модели не требуется введения дополнительного закона изменения сдвиговой жесткости от уровня средних напряжений – это происходит автоматически на основании (3), так как увеличение средних напряжений приводит к увеличению предельного значения интенсивности касательных напряжений  $\tau_i^*$ . По существу, кривые деформирования при различных уровнях средних напряжений будут подобны друг другу, как и в моделях, родственных Hardening Soil, но для описания этого требуется существенно более простая запись.

Поверхность прочности в модели описывается модифицированным условием прочности Мизеса – Шлейхера – Боткина и записывается в октаэдрических напряжениях. Поверхность текучести кусочно-линейная, что позволяет хорошо адаптировать модель к фактиче-



**Таблица. Параметры модели Ю.К. Зарецкого и методы их определения**

Параметр		Ед. изм.	Значение	Метод определения
$\varphi_{oct}$	Октаэдрический угол внутреннего трения	°	Характеризует зависимость сопротивления сдвигу от средних напряжений	По результатам испытаний трехосного сжатия, построенным в октаэдрических координатах («паспорт прочности», рис. 1)
$c_{oct}$	Октаэдрическое сцепление	кПа	Характеризует сопротивление сдвигу при нулевых средних напряжениях	
$\varphi_0$	Угол начального положения поверхности текучести I–II	°	Определяет размер упругой области в начале нагружения (девиаторное нагружение)	Определяются историей нагружения и могут быть определены на основании моделирования исходного напряженного состояния
$\Psi_0$	Угол начального положения поверхности текучести III	°		
$\sigma_{mстр}$	Структурная прочность в октаэдрических координатах	кПа	Определяет размер упругой области в начале нагружения (объемное сжатие)	
$A, B$	Параметры гиперболической зависимости интенсивности деформации сдвига от интенсивности касательных напряжений	-	Задают сдвиговую жесткость модели	
$a, b$	Параметры гиперболической зависимости объемной деформации от средних напряжений	-	Задают объемную жесткость модели	Компрессионная кривая, построенная по совокупности испытаний трехосного сжатия при различных напряжениях, обработка по аналогии с [4]

ческие параметры прочности;  $\Phi, \Psi, P$  – функции упрочнения.

$$\begin{aligned} \Phi(\gamma_i^p) &= \frac{\tau_i}{\tau_i^*} = \frac{\gamma_i^p}{(1-B)\gamma_i^* + B\gamma_i^p}; \\ \Psi(\gamma_i^p) &= \frac{\gamma_i^p}{\gamma_i^* - \gamma_i^p}; \\ P^*(\epsilon_v^p, \gamma_i^p) &= K^p \epsilon_v^p, \end{aligned} \quad (5)$$

где  $B$  – экспериментальный параметр;  $\gamma_i^*$  – предельное значение интенсивности

пластических деформаций;  $K^p$  – модуль объемной пластической деформации.

Максимально подробное описание модели с примером определения параметров на основании паспорта прочности приведено в учебном пособии В.В. Орехова [8].

К безусловным достоинствам модели Ю.К. Зарецкого следует отнести ее простоту и ясный физический смысл каждого параметра, ведь каждое входящее в модель выражение обосновано экспериментальными наблюдениями. В отличие

от большинства современных моделей, эта модель может быть полностью определена на основании 3–6 опытов трехосного сжатия, что, собственно говоря, и сделало ее удобным инструментом для проектирования гидротехнических сооружений с применением крупнообломочных грунтов, для которых проведение многочисленных испытаний затруднено, а иногда и невозможно. Несмотря на кажущуюся сложность выражений (4) и (5), математическая постановка модели не требует сложных вычислений. **и**

**Список литературы** ▶

1. Боткин А.И. Исследование напряженного состояния в сыпучих и связных грунтах // Известия ВНИИГ. 1939. № 24. С. 153–171.
2. Боткин А.И. О прочности сыпучих и хрупких материалов // Известия ВНИИГ. 1940. Т. 26. С. 205–235.
3. Kondner R.L. Hyperbolic stress-strain response: cohesive soils // Journal of the Soil Mechanics and Foundations Division. ASCE, 1963. Vol. 89. № 1. P. 115–143.
4. Kondner R.L., Zelasko J.S. A hyperbolic stress strain formulation for sands // Proceedings of the 2nd Pan American Conference on soil mechanics and foundation engineering, Brazil, San Paulo, 1963. Vol. 1. P. 289–324.
5. Алехин А.Н., Алехин А.А. Эффективный метод определения параметров нелинейной модели грунта из полевых испытаний // Вестник ПНИПУ. Строительство и архитектура. 2017. Т. 8. № 4. С. 54–63.
6. Janbu N. Soil compressibility as determined by oedometer and triaxial tests // Proceedings of European Conference on Soil Mechanics and Foundation Engineering, Wiesbaden, 1963. Vol. 1. P. 19–25.
7. Зарецкий Ю.К. Лекции по современной механике грунтов. Ростов-на-Дону: Издательство Ростовского университета, 1989. 608 с.
8. Орехов В.В. Методика расчетов многофазных, нелинейно деформируемых грунтовых оснований при статических и сейсмических воздействиях. Москва: МГСУ, 2010. 80 с.