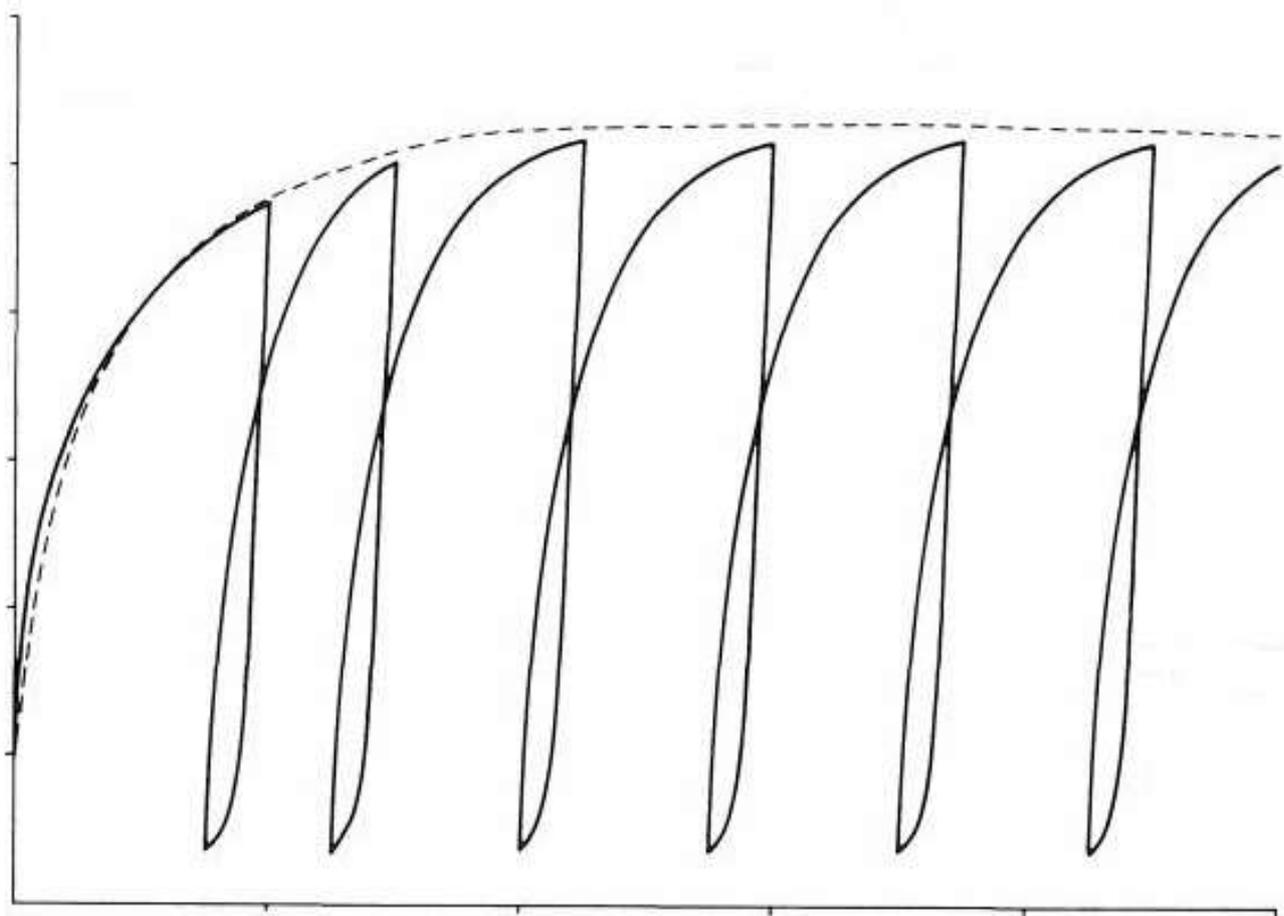


Обзор работы Вермеера и Де Борста о неассоциированной пластичности грунтов и бетона. Часть 8



Завершаем публикацию обзора работы П.А. Вермеера и Р. Де Борста «Неассоциированная пластичность для дисперсных грунтов, бетона и скальных пород» [8], которая была опубликована в 1984 году в журнале *Heron* (Нидерланды) на английском языке. В первой части [1] мы кратко описали общее содержание этой работы, во второй [2] подробнее остановились на дилатансии и трехосных испытаниях, в третьей [3] – на модели, пренебрегающей эффектами упрочнения и разупрочнения (так называемой неупрочняющейся модели), в четвертой [4] – на некоторых последствиях неассоциированной пластичности, в пятой [5] – на изотропном упрочнении, в шестой [6] – на унифицированной модели поведения дисперсных и цементированных зернистых материалов при монотонном нагружении с учетом упрочнения и разупрочнения, в седьмой [7] – на формировании полосы сдвига. Здесь будут рассмотрены пластические модели поведения дисперсных и цементированных зернистых материалов при циклическом нагружении и приведены общие выводы по всему обзору.

ПОДХОДЫ К РАЗРАБОТКЕ МОДЕЛЕЙ ПОВЕДЕНИЯ МАТЕРИАЛОВ ПРИ ЦИКЛИЧЕСКОМ НАГРУЖЕНИИ

С точки зрения Вермеера и Де Борста [8] разработка надежных конститутивных (определяющих) моделей поведения материалов при циклическом нагружении является очень сложной задачей. К моменту написания рассматриваемой работы [8] достаточно успешными ее авторам казались только модели, нацеленные на описание циклического поведения металлов, например: модель Бесселинга, описывающая поведение материала, составленного из различных элементов объема, испытывающих одинаковую общую деформацию, но имеющих различные пределы текучести (Besseling, 1958); модель Мроза (Mroz, 1967), включающая две вложенных одна в другую поверхности – начала текучести и полного перехода материала в пластическое состояние; модель комбинированной поверхности нагружения Дафалиаса (Dafalias, 1975), включающая поверхность текучести и предельную поверхность, положение которой определяет развитие нелинейных деформаций и разрушение материала.

Что касается дисперсных и цементированных зернистых грунтов и бетона, то ко времени публикации работы [8] ситуация представлялась Вермееру и Де Борсту достаточно неопределенной. Были предприняты кое-какие попытки смоделировать циклическое поведение дисперсного грунта, используя инкрементные нелинейные модели (Chambon, Darve, 1984; Robinet, Mohkam, 1982 и др.). В таких моделях инкрементальная зависимость «напряжение – деформация» имела следующую форму (напомним, что набор буквенного обозначения жирным шрифтом означает столбцовую матрицу, а точка над ним – его материальную производную по времени, то есть скорость изменения):

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{D}(\boldsymbol{\sigma}, \dot{\boldsymbol{\sigma}}, \kappa) \dot{\boldsymbol{\epsilon}}. \quad (1)$$

Определяющая матрица здесь зависит не только от текущего напряжения $\boldsymbol{\sigma}$ и некоего параметра упрочнения κ , но и от скорости изменения напряжения $\dot{\boldsymbol{\sigma}}$. Следовательно, связь между $\dot{\boldsymbol{\sigma}}$ и $\dot{\boldsymbol{\epsilon}}$ в таких моделях является нелинейной, что не очень удобно с точки зрения вычислений. Кроме того, в них обычно требуется очень большое количество материальных констант (иногда более 20), что почти исключает их использование для практических инженерных целей.

Другим типом инкрементных нелинейных моделей является инкрементально-нелинейная эндохронная теория пластичности, первоначально предложенная Валанисом (Valanis, 1971) для описания реакций металлов и расширенная Базантом и Батом (Bazant, Bhat, 1976) для зернистых материалов. Однако, как считают Вермеер и Де Борст, применение моделей такого типа является довольно громоздким и в некоторых случаях гистерезисное поведение дисперсных и цементированных зернистых материалов может быть описано только с помощью уж очень хитроумных приемов, например с использованием концепции скачкообразного кинематического упрочнения (Bazant, 1978).

Еще один подход был предложен Базантом и Кимом (Bazant, Kim, 1979), которые объединили теорию ассоциированной пластичности с теорией трещинообразования Дугилла (Dougill, 1976), в которой для ограничения упругой области используется критерий, выражаемый в деформациях, а не в напряжениях. Кроме того, в отличие от теории пластичности в теории трещинообразования вместо использования упругой жесткости принимается, что разгрузка происходит вдоль секущей ветви (рис. 1).

К моменту написания рассматриваемой работы [8] теория трещинообразования, включая ее сочетание с теорией пластичности, не имела с точки зрения авторов большого практического значения, так как еще предстояло решить некоторые фундаментальные вопросы, в том числе для облегчения использования теории Дугилла в компьютерных программах. К тому же сочетание теорий пластичности и трещинообразования может иметь много комбинаций, не все из которых приводят к согласованным моделям.

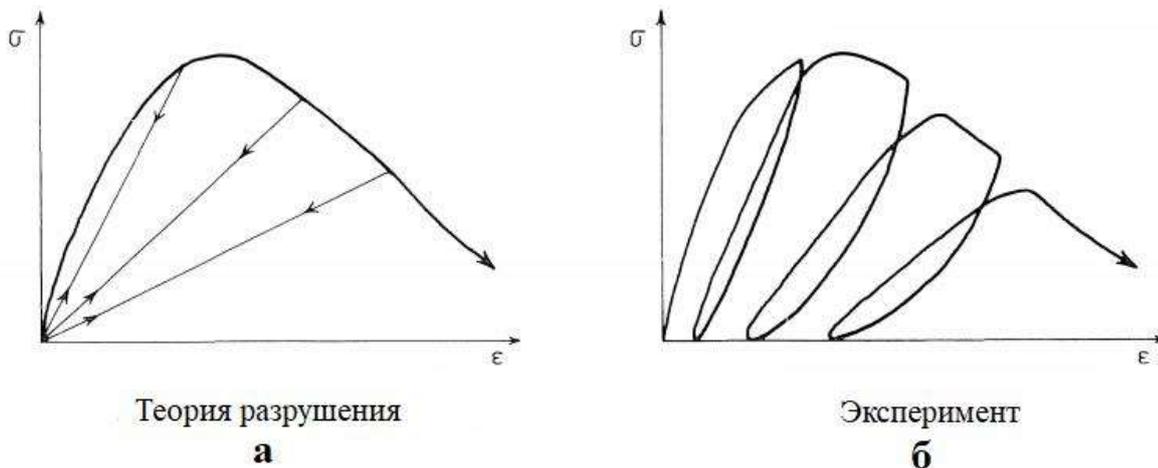


Рис. 1. Теория Дж. Дугилла (Dougill, 1976) преувеличивает уменьшение модуля разгрузки – повторного нагружения

Результаты испытаний, как отмечают Вермеер и Де Борст, показывают, что цементированные зернистые материалы вблизи пиковой прочности и после нее действительно показывают возрастающее ухудшение упругой жесткости из-за образования микротрещин, но это ухудшение сильно преувеличено в теории Дугилла (см. рис. 1). В принципе, оно может быть включено в теорию пластичности, причем вместо того, чтобы использовать постоянный модуль Юнга, его можно связать с пористостью материала, но не непосредственно, а через такой параметр пластической деформации, как эффективная деформация. При этом, подчеркивают авторы, и ухудшение упругой жесткости, и когезионное разупрочнение (см. часть б) вызваны образованием микротрещин в цементированных зернистых материалах, поэтому подходы к ним должны быть более или менее сходными.

Относительно выбора направления конститутивного моделирования циклического поведения дисперсных и цементированных зернистых материалов к моменту написания рассматриваемой работы [8] не было единого мнения. По мнению ее авторов, лучше всего было следовать достаточно успешным идеям в области пластичности металлов. Например, Мроз (Mroz, 1978, 1979) и Дафалиас (Dafalias, 1979, 1982) адаптировали свои модели для предсказания поведения глин, а Моленкамп (Molenkamp, 1982) разработал кинематическую упрочняющуюся модель для песка на основе модели «вложенной» поверхности текучести Мроза. Также была предложена модель предельной (граничной) поверхности пластичности для описания поведения бетона при циклическом нагружении (Fardis et al., 1983), хотя ее недостатком было то, что она также являлась инкрементально-нелинейной (из-за того, что в ней принималось исчезновение упругой области).

РАЗРАБОТКА ПЛАСТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ПОВЕДЕНИЯ ДИСПЕРСНЫХ И СЦЕМЕНТИРОВАННЫХ ЗЕРНИСТЫХ МАТЕРИАЛОВ ПРИ ЦИКЛИЧЕСКОМ НАГРУЖЕНИИ

Далее Вермеер и Де Борст собираются изложить идеи Дафалиаса (Dafalias, 1979, 1982) с добавлением собственных выкладок, ближе соответствующих классическому подходу, и на этой основе, а также на основе идей, разработанных в предыдущих главах для монотонного нагружения, обсудить возможности разработки гистерезисных моделей для дисперсных и цементированных зернистых материалов. При этом авторы отмечают, что идеи Мроза, тесно связанные с идеями Дафалиаса, также могут использоваться в качестве отправной точки для разработки моделей, описывающих гистерезисное поведение песка и бетона.

Предельная поверхность пластичности

В качестве основы для дальнейших выкладок авторы рассматриваемой работы [8] берут типичную кривую «напряжение – деформация» по результатам стандартного испытания металла (например, отожженной меди) на растяжение, показанную на рис. 2, а. Если вычесть упругую деформацию из общей деформации согласно приводившемуся во второй части уравнению

$$\dot{\epsilon} = \dot{\epsilon}^e + \dot{\epsilon}^p, \quad (2)$$

то получится зависимость «напряжение – пластическая деформация, представленная на рис. 2, б. Суть *предельной (граничной) поверхности пластичности* состоит в том, что текущий модуль пластичности h принимается зависящим от расстояния δ до штриховой линии – предельной поверхности. Таким образом, принимается одноосная зависимость

$$\dot{\sigma}_{11} = h \dot{\epsilon}_{11}^p, \quad (3)$$

где величина h зависит от расстояния δ между текущим напряжением σ_{11} и предельной поверхностью, а также, возможно, от некоторых других параметров, таких как наклон линии предельной поверхности H .

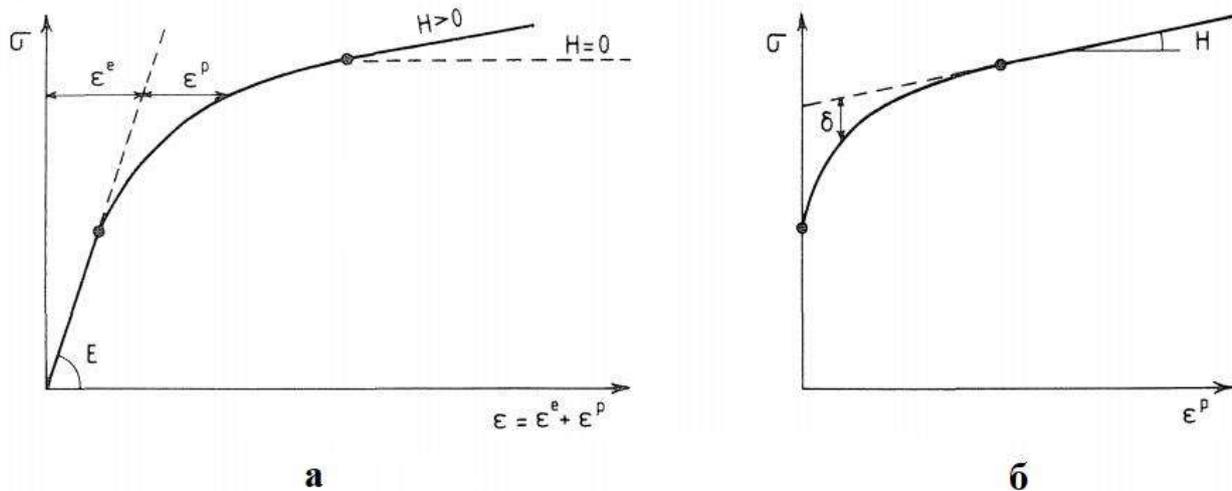


Рис. 2. Модуль упрочнения рассчитывается по расстоянию δ и предельному значению H , которое может быть нулевым

Следовательно:

$$h = h(\delta, H, \text{другие const}). \quad (4)$$

Очевидно, что для плавного перехода от упругого к упругопластическому поведению функция h должна удовлетворять следующим требованиям: $h > H$; $\partial h / \partial \delta > 0$; $h = H$ при $\delta = 0$; $h = \infty$ с появлением текучести.

Вермеер и Де Борст считают, что, обобщая многомерное пространство напряжений, надо сначала пересмотреть определение функции текучести f . Когда это понятие было введено в части 3 [3] для неупрочняющегося материала, принималось, что f зависит только от тензора напряжений σ , то есть что $f = f(\sigma)$. При расширении (адаптации) модели для учета изотропного упрочнения (см. часть 5 [5]) авторам пришлось включить в определение функции текучести параметр упрочнения: $f = f(\sigma, \kappa)$. При этом для правильного описания поведения материала при циклическом нагружении необходимо, чтобы поверхность текучести не только стала «расширенной», но и переместилась для учета кинематического упрочнения (рис. 3). Поэтому Вермеер и Де Борст считают, что крайне важно включить в определение f также и текущий центр поверхности текучести α . При этом некая точка будет находиться в пластическом состоянии если для нее будет соблюдаться следующее условие:

$$f(\sigma - \alpha, \kappa) = 0. \quad (5)$$

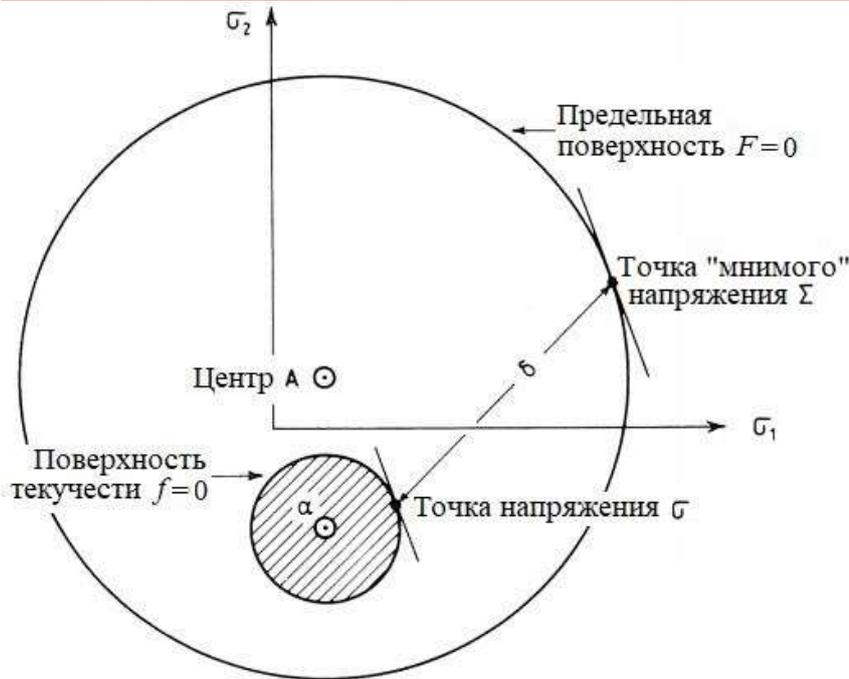


Рис. 3. Предельная поверхность вокруг относительно небольшой упругой области

Аналогичным образом в многомерном пространстве напряжений можно продлить линию предельной поверхности, показанную на рис. 2, б, до предельной (граничной) поверхности F , которая всегда охватывает поверхность текучести f (см. рис. 3). Для точки, которая находится в пластическом состоянии, также должно соблюдаться условие $F = 0$. Очевидно, что напряжение σ никогда не сделает величину F равной нулю, если поверхность текучести f лежит внутри предельной поверхности F . Поэтому принимается, что функция F зависит от «мнимого» тензора напряжений Σ (см. рис. 3):

$$F = F(\Sigma - A, \chi), \quad (6)$$

где A – центр предельной поверхности F . Вопрос о том, как «мнимое» напряжение Σ получается из фактического напряжения σ , авторы обещают обсудить позже.

Как и в предыдущих частях, скорость пластической деформации можно получить через пластический потенциал g :

$$\dot{\epsilon}^p = \lambda \frac{\partial g}{\partial \sigma}. \quad (7)$$

Чтобы определить множитель λ , можно снова использовать условие непротиворечивости (согласованности), которое теперь выглядит так:

$$\frac{\partial f}{\partial \sigma} (\dot{\sigma} - \dot{\alpha}) + \lambda \frac{\partial f}{\partial \chi} \frac{\partial \chi}{\partial \epsilon^p} \frac{\partial g}{\partial \sigma} = 0. \quad (8)$$

Теперь надо принять направление для вектора $\dot{\alpha}$. Одним из наиболее широко используемых в этом отношении является допущение, предложенное Циглером (Ziegler, 1959):

$$\dot{\alpha} = \text{scalar} * (\sigma - \alpha) \quad (9)$$

при следующем дополнительном допущении:

$$\text{scalar} * \frac{\partial f^T}{\partial \sigma} (\sigma - \alpha) = h^\alpha \frac{\partial f^T}{\partial \sigma} \dot{\epsilon}^p, \quad (10)$$

где h^α можно представить себе как пластический модуль для центра поверхности текучести.

С помощью закона текучести (закона пластического течения) можно получить:

$$\frac{\partial f^T}{\partial \sigma} \dot{\alpha} = \lambda h^\alpha \frac{\partial f^T}{\partial \sigma} \frac{\partial g}{\partial \sigma}. \quad (11)$$

Если вставить выражение для множителя λ , выведенное из уравнений (10) и (11), в уравнение (7), получится следующая формула для скорости пластической деформации:

$$\dot{\epsilon}^p = \frac{\frac{\partial f^T}{\partial \sigma} \dot{\sigma}}{h^\alpha \frac{\partial f^T}{\partial \sigma} \frac{\partial g}{\partial \sigma} - \frac{\partial f}{\partial \chi} \frac{\partial \chi^T}{\partial \epsilon^p} \frac{\partial g}{\partial \sigma}} \frac{\partial g}{\partial \sigma}. \quad (12)$$

Выводы, полученные до сих пор, как считают Вермеер и Де Борст, очень напоминают классические концепции кинематического/изотропного упрочнения. Заметное различие между классическими идеями пластичности и концепцией предельной поверхности заключается в том, что в первом случае мы выбираем h и общая пластическая твердость из-за изотропного и кинематического упрочнения следует из выбора для каждого из этих видов упрочнения, а во втором случае общая пластическая твердость определяется через расстояние δ до предельной поверхности и значение h^α следует из условия непротиворечивости.

При выборе концепции предельной поверхности формула (12) заменяется на следующее уравнение:

$$\dot{\epsilon}^p = \frac{\frac{\partial f^T}{\partial \sigma} \dot{\sigma}}{h \frac{\partial f^T}{\partial \sigma} \frac{\partial g}{\partial \sigma}} \frac{\partial g}{\partial \sigma}. \quad (13)$$

Теперь, делают вывод авторы, уравнение (13) сводится к уравнению (3) для одноосного случая. Сравнивая формулы (12) и (13), можно увидеть, что h^a определяется так:

$$h^a = h + \frac{\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}^p} \frac{\partial \boldsymbol{\varepsilon}^p}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \frac{\partial \boldsymbol{\varepsilon}^T}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}^p} \frac{\partial g}{\partial \boldsymbol{\sigma}}}{\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \frac{\partial g}{\partial \boldsymbol{\sigma}}} \quad (14)$$

Следовательно, в терминах классической пластичности выбираются h^a и $\partial f / \partial \boldsymbol{\varepsilon}$, а пластический модуль h будет результатом этих двух выборов. Тогда как при подходе с предельной поверхностью в качестве начальной точки выбираются h и $\partial f / \partial \boldsymbol{\varepsilon}$, а затем из условия непротиворечивости выводится h^a .

«Мнимое» напряжение Σ

При введении «мнимого» напряжения Σ принималось, что оно находится на предельной поверхности F всякий раз, когда фактическое напряжение $\boldsymbol{\sigma}$ располагается на поверхности текучести f . Авторы подчеркивают, что этого условия недостаточно для определения Σ , но оно является необходимым. Другое требование к Σ заключается в том, что поверхность текучести и предельная поверхность могут только соприкоснуться, но никогда не должны пересекаться. Это означает, что в предельном состоянии (при $\boldsymbol{\sigma} = \Sigma$) необходимо соблюдение следующего условия (рис. 4, а):

$$\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = \frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \quad (15)$$

Это условие выполняется априори, если требуется, чтобы «мнимое» напряжение Σ определялось так, чтобы $\boldsymbol{\sigma}$ и Σ имели одинаковые нормали (перпендикуляры) соответственно к поверхности текучести и к предельной поверхности в течение всего процесса нагружения (Dafalias, Popov, 1976; рис. 4, б):

$$\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = \frac{\partial F}{\partial \Sigma} \quad (16)$$

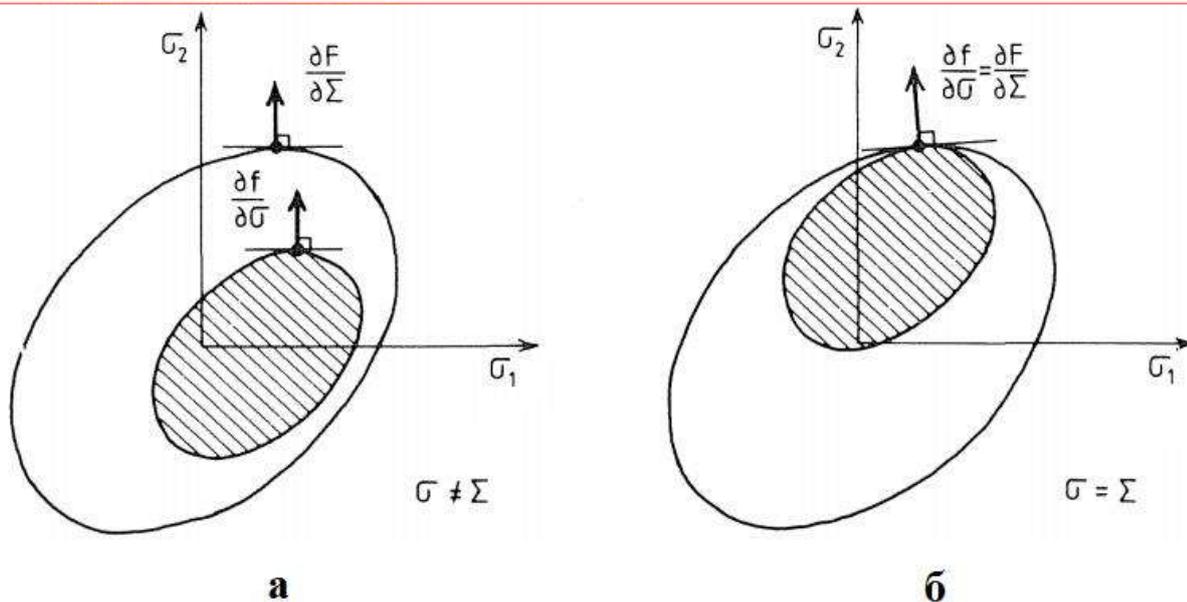


Рис. 4. Упругая область перемещается внутри ограничивающей поверхности

Для строго выпуклых поверхностей текучести и предельных поверхностей уравнение (16) определяет единственное «мнимое» напряжение для любого заданного напряжения, которое находится на поверхности текучести. Как авторы обещают показать далее, этот подход не очень хорош для фрикционных материалов. Однако для металлов он довольно удобен. Более того, он допустим для более общего закона кинематического упрочнения по сравнению с уравнениями (10) и (11) (Dafalias, Popov, 1976).

Вермеер и Де Борст отмечают, что с определением «мнимого» напряжения Σ разработка конститутивной модели почти завершена. Теперь нужно только определить какое-то правило для представленного вектором A перемещения центра предельной поверхности. Здесь авторы опять напоминают, что поверхность текучести и предельная поверхность могут только касаться друг друга, но не пересекаться. Это требование может быть удовлетворено путем соблюдения следующего условия:

$$\dot{A} = \dot{\alpha} - \text{scalar} * (\Sigma - \sigma), \quad (17)$$

где скалярная величина может быть определена из условия непротиворечивости для предельной поверхности:

$$\dot{F}(\Sigma - A, x) = 0. \quad (18)$$

Адаптация пластической модели при циклическом нагружении для фрикционных материалов

Авторы считают, что для фрикционных материалов формула (16) для определения «мнимого» напряжения Σ не очень удобна, по крайней мере если придерживаться концепции фрикционного упрочнения. Тогда нормаль к поверхности текучести в любой ее

точке никогда не может соответствовать нормали в любой точке ограничивающей поверхности (рис. 5, а). По этой причине предлагается другое преобразование:

$$\Sigma = \sigma + bD \frac{\partial f}{\partial \sigma}, \quad (19)$$

где b – скалярный множитель, который может быть определен из условия, что Σ находится на предельной поверхности, то есть что

$$F(\Sigma - A, \kappa) = 0. \quad (20)$$

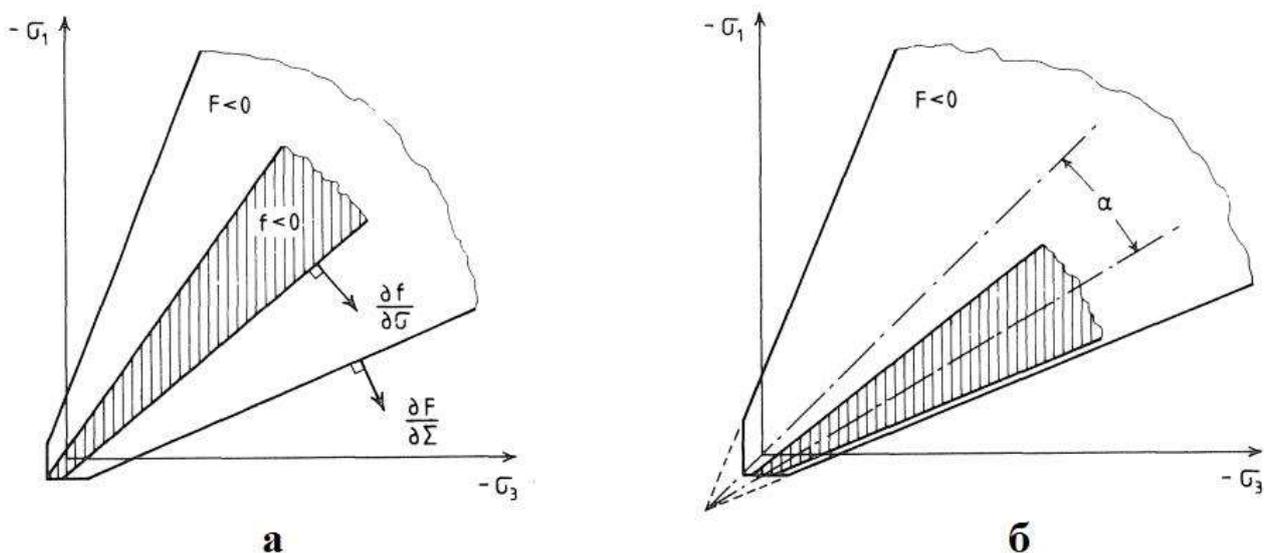


Рис. 5. Предложенные варианты предельной поверхности и упругой области

Формула (19) не может использоваться для произвольных поверхности текучести и предельной поверхности, поскольку априори не гарантируется, что они не будут пересекаться. Однако, как указывают авторы, для разумного выбора этих поверхностей определенно может быть выполнено указанное условие. Примером этого является модель чисто фрикционного упрочнения для сухого песка (см. часть 5 [5]), которая соответствует критерию Мора – Кулона. Этот критерий теперь записывается следующим образом:

$$f = \tau^* - \sigma^*(\sin \phi^* + \sin \alpha), \quad (21)$$

где ϕ^* – мобилизованный угол внутреннего трения, α – наклон осевой линии поверхности текучести (рис. 5, б).

Теперь принимается, что предельная поверхность определяется следующим образом:

$$F = T^* - \Sigma^* \sin \phi, \quad (22)$$

где T^* и Σ^* являются функциями «мнимого» напряжения Σ и определяются по аналогии с σ^* и τ^* ; ϕ – угол внутреннего трения в предельном состоянии.

Здесь авторы отмечают, что кинематическое упрочнение на предельной поверхности, которое обсуждалось ранее, в уравнении (22) не учитывается. Это, с одной стороны, в целом неправильно, так как перемещение предельной поверхности связано с перемещением поверхности текучести через то условие, что обе эти поверхности не могут пересекаться. С другой стороны в конкретных условиях трехосного испытания при $\sigma_2 = \sigma_3$ это не приводит к пересечению двух указанных поверхностей, по крайней мере для функции Мора – Кулона.

Модель, которая определяется уравнениями (19), (21) и (22), удовлетворяет условию (15). Чтобы показать это, авторы сначала отмечают, что для поверхностей текучести, которые являются линейными в пространстве главных напряжений, то есть для которых (см. часть 3 [3])

$$f = \frac{1}{2}(\sigma_3 - \sigma_1) + \frac{1}{2}(\sigma_3 + \sigma_1) \sin \phi - c \cos \phi, \quad (23)$$

разложение в ряд Тейлора дает следующую формулу для множителя b :

$$b = - \frac{F(\sigma)}{\frac{\partial F^T}{\partial \sigma} \mathbf{D} \frac{\partial f}{\partial \sigma}}. \quad (24)$$

Следовательно, при нагружении:

$$\Sigma = \sigma - \frac{F(\sigma)}{\frac{\partial F^T}{\partial \sigma} \mathbf{D} \frac{\partial f}{\partial \sigma}} \mathbf{D} \frac{\partial f}{\partial \sigma}. \quad (25)$$

Когда напряжение σ находится на предельной поверхности, соблюдается условие $F(\sigma) = 0$, так что согласно уравнению (25) «мнимое» напряжение Σ совпадает с фактическим напряжением σ (то есть $\sigma = \Sigma$).

Кроме того, из уравнений (19) и (21) можно вывести следующие формулы:

$$\frac{\partial f}{\partial \sigma} = \frac{\partial \tau^*}{\partial \sigma} - (\sin \phi^* + \sin \alpha) \frac{\partial \sigma^*}{\partial \sigma}, \quad (26)$$

$$\frac{\partial F}{\partial \Sigma} = \frac{\partial T^*}{\partial \Sigma} - \sin \phi \frac{\partial \Sigma^*}{\partial \Sigma}. \quad (27)$$

В предельном состоянии из равенства $\sigma = \Sigma$ следует, что $\tau^* = T^*$ и $\sigma^* = \Sigma^*$. Поэтому:

$$\frac{\partial \tau^*}{\partial \sigma} = \frac{\partial T^*}{\partial \Sigma} \quad (28)$$

$$\frac{\partial \sigma^*}{\partial \sigma} = \frac{\partial \Sigma^*}{\partial \Sigma} \quad (29)$$

Так что теперь можно переписать уравнение (27) таким образом:

$$\frac{\partial F}{\partial \Sigma} = \frac{\partial F}{\partial \sigma} = \frac{\partial \tau^*}{\partial \sigma} - \sin \phi \frac{\partial \sigma^*}{\partial \sigma} \quad (30)$$

Сравнивая уравнения (26) и (30), можно увидеть, что требование (15) выполняется при условии, что в предельном состоянии

$$\sin \phi = \sin \phi^* + \sin \alpha \quad (31)$$

Чтобы дать читателям представление о достоинствах моделей такого типа, Вермеер и Де Борст приводят пример циклического нагружения образца песка (с теми же свойствами, что и в части 4 [4]) в трехосном приборе. Принимается, что этот образец сначала нагружается изотропно, и затем подвергается ряду циклов осевого нагружения. Его поведение в соответствии с представленной выше моделью отражено на рис. 6. В расчетах авторами была использована следующая функциональная зависимость для пластического модуля h :

$$h = a(\delta^0)^b \frac{\delta}{\delta - \delta^0} \quad (32)$$

где a и b – параметры, которые могут быть использованы для обеспечения адекватного соответствия результатам испытаний; δ^0 – расстояние между фактическим напряжением σ и «мнимым» напряжением Σ в начале каждого нагружения.

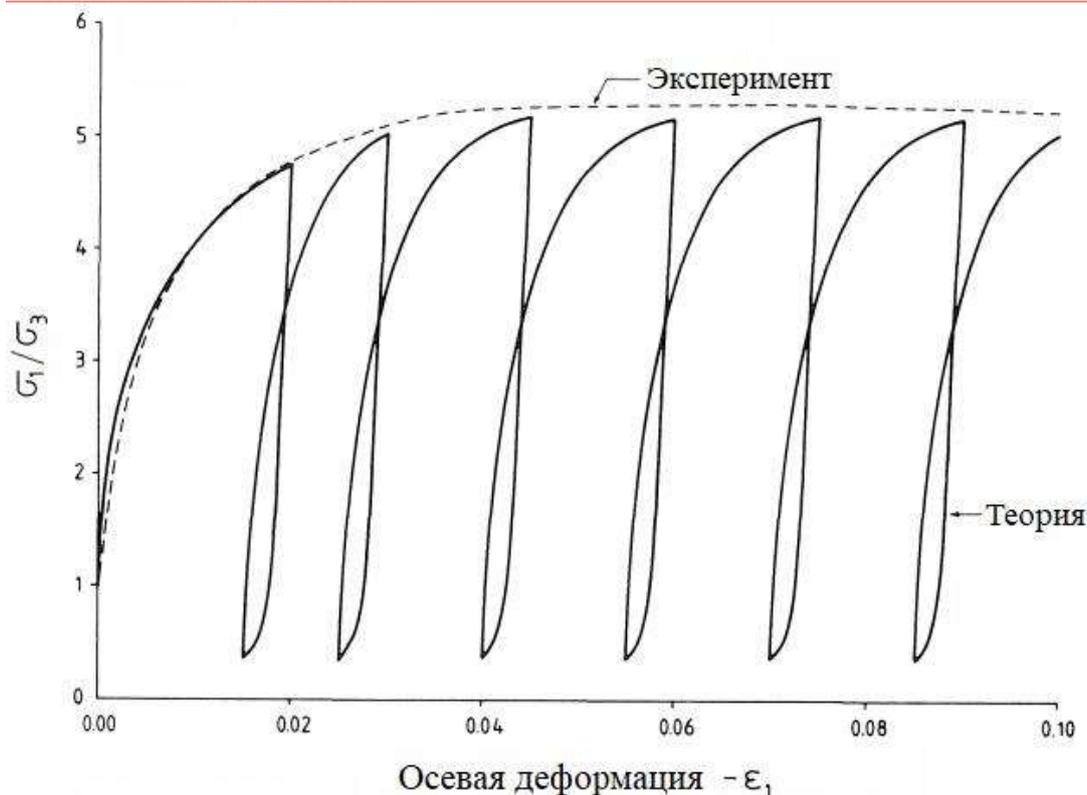


Рис. 6. Результат моделирования циклического нагружения сухого песка в трехосном приборе

ОБЩЕЕ ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Представленная вниманию читателей часть 8 обзора работы Вермеера и Де Борста «Неассоциированная пластичность для дисперсных грунтов, бетона и скальных пород» [8] является заключительной. В конце своей работы авторы делают следующие общие выводы.

Несмотря на то что цементированные зернистые грунты и бетон являются более жесткими и прочными, чем несвязные грунты, их пластическое течение достаточно хорошо описывается критерием текучести Мора – Кулона, который включает угол внутреннего трения и силу сцепления частиц грунта (удельное сцепление). Пластическое течение почти всегда сопровождается пластическим увеличением объема (дилатансией), но степень деформирования указанных материалов значительно отличается от той, которая следует из теории, основанной на ассоциированном законе текучести (так называемой ассоциированной теории пластичности).

Концепции механики дисперсного грунта для угла дилатансии полезны также и для бетона и скальных пород. Незадолго до и вскоре после пиковой прочности угол дилатансии достигает постоянного значения в зависимости от конкретного материала. Угол дилатансии как минимум на 20 град. меньше угла внутреннего трения. Из-за этой большой разницы приходится использовать неассоциированный закон текучести. Этот закон соответствует потенциалу пластической деформации (так называемому пластическому потенциалу), который напоминает функцию текучести, но включает угол дилатансии вместо угла внутреннего трения.

Необходимость в неассоциированной пластичности была продемонстрирована в работе [8] численными результатами для решения некоторых практических задач. Использование ассоциированного закона текучести приводит к завышению жесткости и несущей способности. Наиболее поразительным численным результатом является возникновение постпикового разупрочнения грунта как следствия полностью неассоциированного закона течения. Это, как считают авторы, можно объяснить нарушением постулата стабильности Друкера.

В работе [8] были описаны следующие три материальные модели возрастающей сложности:

- 1) идеально-пластическая пятипараметрическая модель («модель для студентов»), являющаяся хорошим введением в теорию пластичности и подходящая для анализа предельных состояний (граничных условий) и для общей аппроксимации деформаций при рабочих нагрузках;
- 2) модель с фрикционным упрочнением и ослаблением сцепления («модель для инженеров»), полученная путем модификации и «расширения» идеально-пластической модели и обеспечивающая баланс между точностью и простотой;
- 3) доработанная вторая модель с учетом гистерезиса и накопления деформаций при циклическом нагружении («модель для ученых»), которую можно сделать привлекательной в вычислительном отношении при использовании концепции предельной поверхности и предложенного авторами нового правила отображения для соответствия рамкам неассоциированной модели типа Мора – Кулона.

Главной особенностью своей работы [8] авторы считают унифицированный подход к механическому поведению несвязных и цементированных зернистых грунтов и бетона. Разница заключается в применении модели в основном из-за доминирующей роли воды в дисперсных грунтах, роли трещин и швов в скальных породах, роли трещин растяжения и арматуры в железобетоне.

Список литературы

1. Обзор работы Вермеера и Де Борста о неассоциированной пластичности грунтов и бетона. Часть 1. Общее содержание // Geoinfo.ru. 17.06.2019. URL: <https://www.geoinfo.ru/product/analiticheskaya-sluzhba-geoinfo/obzor-raboty-vermeera-i-de-borsta-o-neassociirovannoj-plastichnosti-gruntov-i-betona-chast-1-obshchee-soderzhanie-40928.shtml>.
2. Обзор работы Вермеера и Де Борста о неассоциированной пластичности грунтов и бетона. Часть 2 // Geoinfo.ru. 25.06.2019. URL: <https://www.geoinfo.ru/product/analiticheskaya-sluzhba-geoinfo/obzor-raboty-vermeera-i-de-borsta-o-neassociirovannoj-plastichnosti-gruntov-i-betona-chast-2-41014.shtml>.
3. Обзор работы Вермеера и Де Борста о неассоциированной пластичности грунтов и бетона. Часть 3 // Geoinfo.ru. 08.07.2019. URL: <https://www.geoinfo.ru/product/analiticheskaya-sluzhba-geoinfo/obzor-raboty-vermeera-i-de-borsta-o-neassociirovannoj-plastichnosti-gruntov-i-betona-chast-3-41059.shtml>.
4. Обзор работы Вермеера и Де Борста о неассоциированной пластичности грунтов и бетона. Часть 4 // Geoinfo.ru. 15.07.2019. URL:

- <https://www.geoinfo.ru/product/analiticheskaya-sluzhba-geoinfo/obzor-raboty-vermeera-i-de-borsta-o-neassociirovannoj-plastichnosti-gruntov-i-betona-chast-4-41085.shtml>.
5. Обзор работы Вермеера и Де Борста о неассоциированной пластичности грунтов и бетона. Часть 5 // Geoinfo.ru. 24.07.2019. URL:
<https://www.geoinfo.ru/product/analiticheskaya-sluzhba-geoinfo/obzor-raboty-vermeera-i-de-borsta-o-neassociirovannoj-plastichnosti-gruntov-i-betona-chast-5-41127.shtml>.
6. Обзор работы Вермеера и Де Борста о неассоциированной пластичности грунтов и бетона. Часть 6 // Geoinfo.ru. 29.07.2019. URL:
<https://www.geoinfo.ru/product/analiticheskaya-sluzhba-geoinfo/obzor-raboty-vermeera-i-de-borsta-o-neassociirovannoj-plastichnosti-gruntov-i-betona-chast-6-41143.shtml>.
7. Обзор работы Вермеера и Де Борста о неассоциированной пластичности грунтов и бетона. Часть 7 // Geoinfo.ru. 08.08.2019. URL:
<https://www.geoinfo.ru/product/analiticheskaya-sluzhba-geoinfo/obzor-raboty-vermeera-i-de-borsta-o-neassociirovannoj-plastichnosti-gruntov-i-betona-chast-7-41161.shtml>.
8. *Vermeer P.A., De Borst R.* Non-associated plasticity for soils, concrete and rock // Heron. 1984. Vol. 29. № 3. URL: <https://repository.tudelft.nl/islandora/object/uuid:4ee188ab-8ce0-4df3-adf5-9010ebfaabf0>.