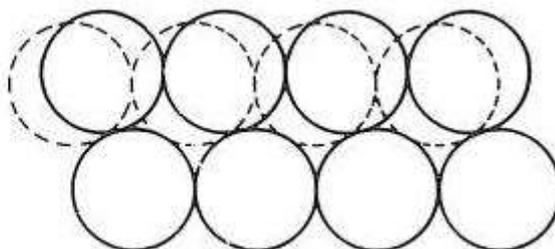
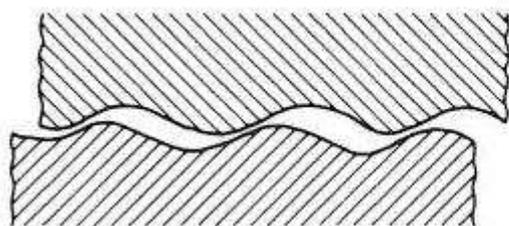


## Обзор работы Вермеера и Де Борста о неассоциированной пластичности грунтов и бетона. Часть 6



Продолжаем публикацию обзора работы П.А. Вермеера и Р. Де Борста «Неассоциированная пластичность для дисперсных грунтов, бетона и скальных пород» [6], опубликованной в 1984 году в журнале *Heron* (Нидерланды) на английском языке. В первой части [1] мы кратко описали общее содержание этой работы, во второй [2] подробнее остановились на дилатансии и трехосных испытаниях, в третьей [3] – на модели, пренебрегающей эффектами упрочнения и разупрочнения материалов (так называемой неупрочняющейся модели), в четвертой [4] – на некоторых последствиях неассоциированной пластичности, в пятой [5] – на изотропном упрочнении. Здесь речь пойдет об унифицированной модели поведения дисперсных и цементированных зернистых материалов при монотонном нагружении, учитывающей упрочнение и разупрочнение и отражающей лишь главные особенности, а не все тонкости реакций этих материалов.

Аналитическая служба  
[info@geoinfo.ru](mailto:info@geoinfo.ru)

### Функция текучести

Авторы рассматриваемой работы [6] показали, что фрикционное упрочнение является важным как для дисперсных, так и для цементированных зернистых материалов, то есть что мобилизованный угол внутреннего трения увеличивается как функция эффективной деформации (это было отражено в предыдущей части [5]). При этом они подчеркивают, что для правильного описания поведения цементированных материалов функция текучести должна учитывать также когезионную прочность (прочность сцепления). Поэтому помимо мобилизованного угла внутреннего трения  $\phi^*$  Вермеер и Де Борст вводят в функцию текучести  $f$  мобилизованное удельное сцепление  $c^*$ :

$$f = \tau^* - \sigma^* \sin \phi^* - c^*, \quad (1)$$

где

$$\sin \phi^* = 2 \frac{\sqrt{(\bar{\varepsilon}^p \varepsilon^f)}}{\bar{\varepsilon}^p + \varepsilon^f} \sin \phi. \quad (2)$$

Авторы обращают внимание читателя на то, что функция текучести (1) лишь ненамного отличается от приводившейся в предыдущей части формулы для фрикционного упрочнения

$$\tau^* = \sigma^* \sin \phi^* + c \cos \phi^*, \quad (3)$$

но только в формуле (1) произведение ( $c \cos\varphi^*$ ) заменено на  $c^*$ .

На рисунке 1 приведено некое представление взаимосвязи между

$$c^* \text{ и } \bar{\varepsilon}^p \quad (4)$$

по результатам испытаний песчаника. Здесь наблюдается значительная разница между пиковой и остаточной прочностью, причем эта разница приблизительно равна удельному сцеплению. Однако, как отмечают авторы, разница между этими двумя видами прочности исчезает при увеличении всестороннего (ограничивающего) давления, что подтверждают результаты других испытаний.

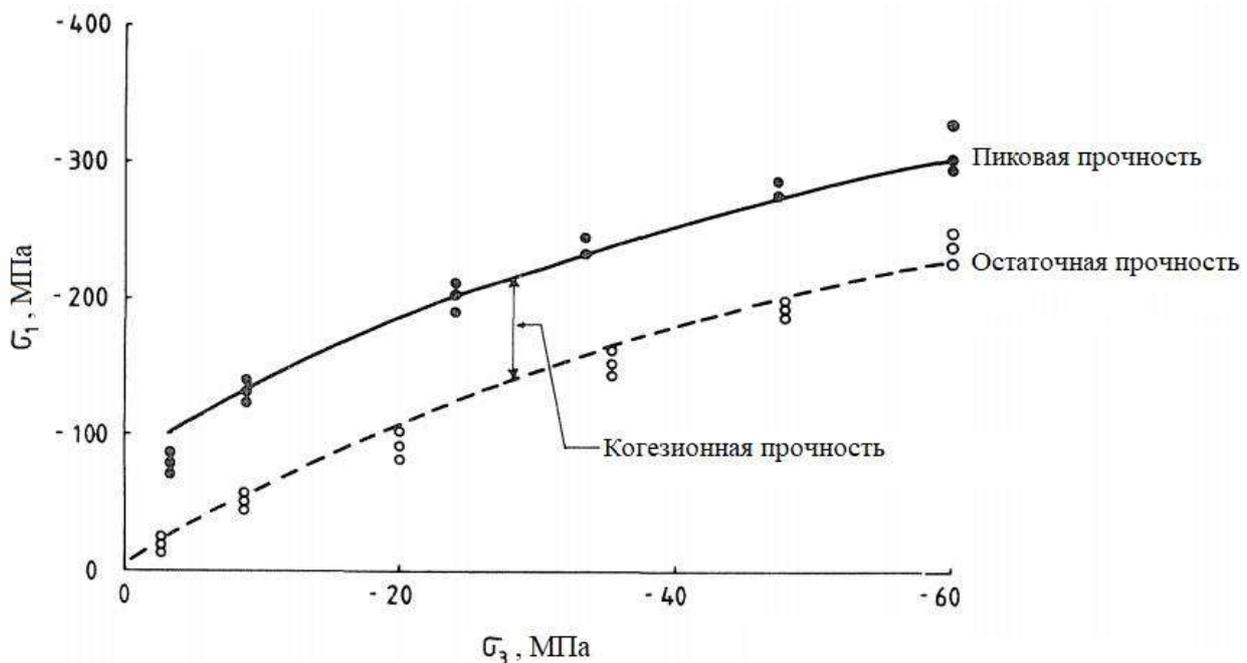


Рис. 1. Результаты трехосного испытания песчаника по данным Ковари (Kovari, 1977). Когезионная прочность исчезает из-за образования микротрещин

Вермеер и Де Борст предлагают смоделировать такое поведение, применяя когезионное разупрочнение (ослабление сцепления). В этом случае возможный выбор для взаимосвязи между вышеуказанными параметрами (4) таков:

$$c^* = c \exp \left[ - \left( \frac{\bar{\varepsilon}^p}{\varepsilon^c} \right)^2 \right], \quad (5)$$

где  $\varepsilon^c$  является константой, сходной с константой  $\varepsilon^f$  в следующем уравнении, приводившемся в предыдущей части [5] для мобилизованного угла внутреннего трения  $\varphi^*$  при фрикционном упрочнении:

$$\sin \phi^* = 2 \frac{\sqrt{(\bar{\epsilon}^p \epsilon^f)}}{\bar{\epsilon}^p + \epsilon^f} \sin \phi \quad \text{для } \bar{\epsilon}^p < \epsilon^f, \quad (6)$$

$$\sin \phi^* = \sin \phi \quad \text{для } \bar{\epsilon}^p > \epsilon^f.$$

Графики по формуле (5) для  $c^*$  при когезионном разупрочнении и по формуле (6) для  $\phi^*$  при фрикционном упрочнении показаны на рис. 2.

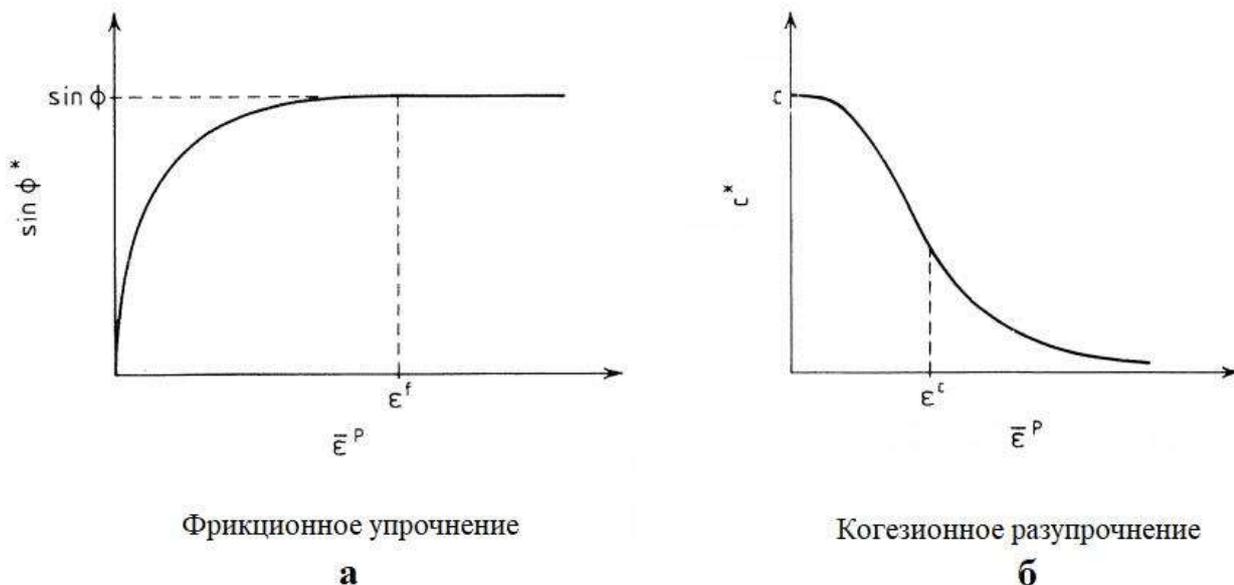


Рис. 2. Квазиэмпирические зависимости в модели упрочнения-разупрочнения

Когезионное разупрочнение можно сделать возможным, если учесть в модели следующее: когда ненарушенный образец скальной горной породы или бетона подвергается сдвигу, в нем сначала развиваются микротрещины, а при разрушении он сильно растрескивается – следовательно, цементация материала в образце постепенно уменьшается и, соответственно, его когезионная прочность в конце концов исчезает, то есть первоначально сцементированный материал в итоге станет более похожим на дисперсный с только фрикционным упрочнением. Работа этой модели продемонстрирована на рис. 3, который дает представление только о ее возможностях (при этом не было предпринято никаких попыток точно подогнать любые существующие данные). Видно, что с увеличением всестороннего (ограничивающего) давления моделируется повышенная пластичность.

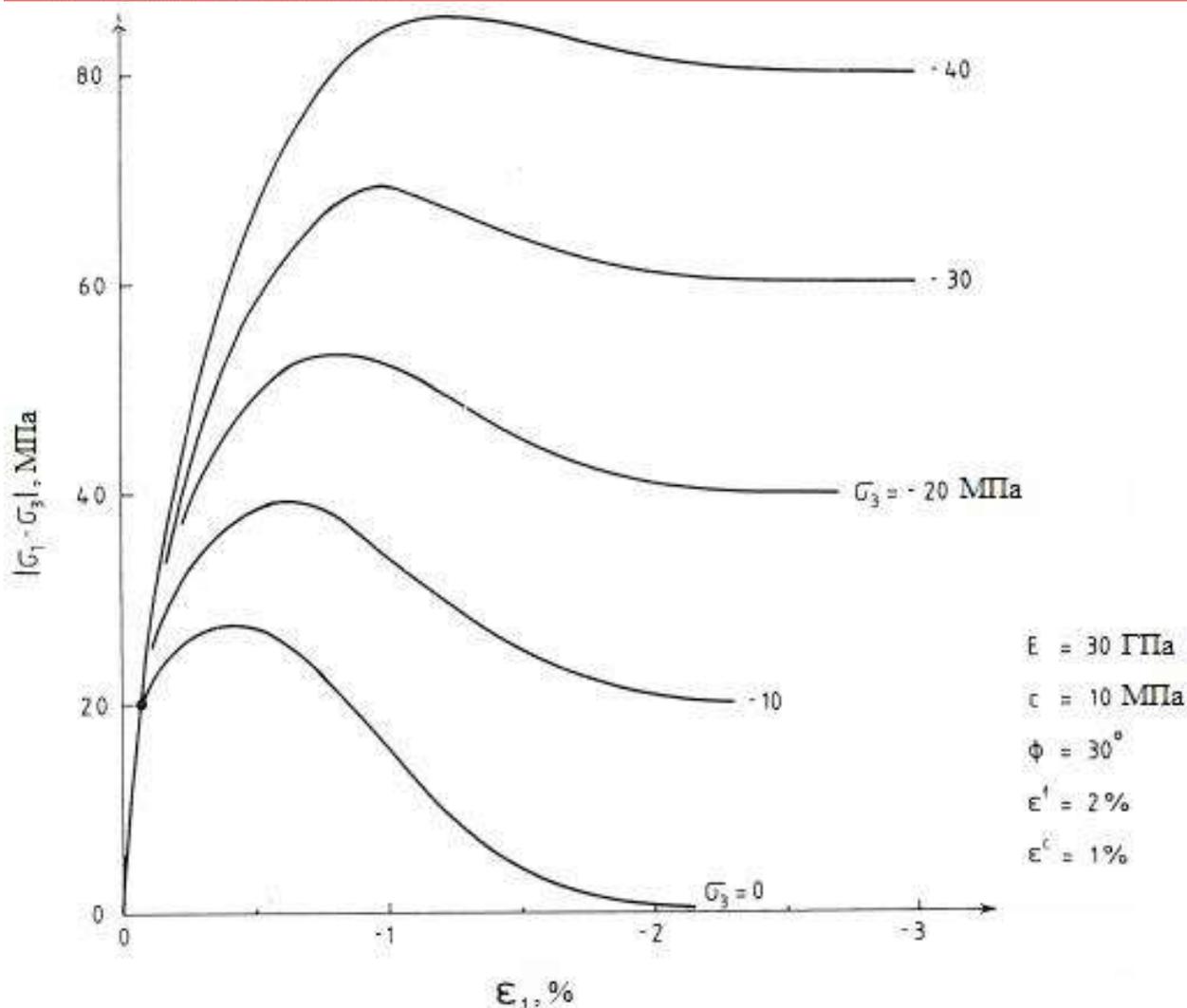


Рис. 3. Расчетное поведение цементированного материала при трехосных испытаниях

### Потенциал пластической деформации и закон пластического течения

Для модели упрочнения, а также для модели упрочнения-разупрочнения, разработка которой представлена в этой части, авторы снова используют функцию потенциала пластической деформации (пластического потенциала), которая практически идентична функции текучести, а именно:

$$g = \tau^* - \sigma^* \sin \psi^* + \text{const} . \quad (7)$$

При равенстве мобилизованного угла дилатансии и мобилизованного угла внутреннего трения ( $\psi^* = \varphi^*$ ) эта функция будет совпадать с функцией текучести (1) и получится ассоциированная модель. Как и модель абсолютной пластичности, модель упрочнения разрабатывается в духе моделей Кулона и Треска с использованием «угловых» поверхностей текучести и пластического потенциала в пространстве главных напряжений (рис. 4 и 5, которые уже приводились в третьей части [3]).

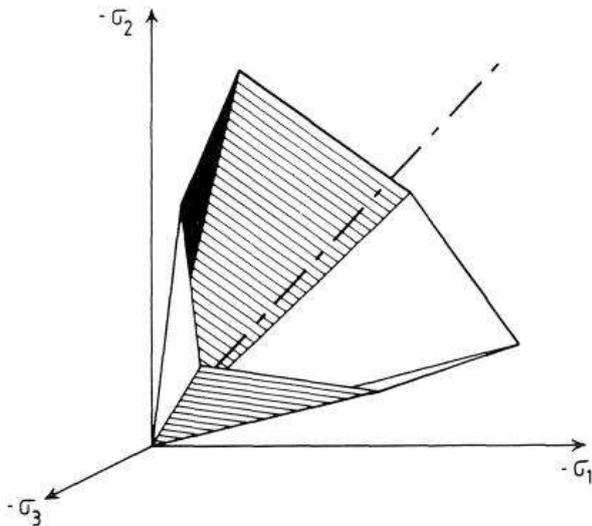


Рис. 4. Поверхность текучести Мора – Кулона в пространстве главных напряжений. Условие текучести  $f=0$  описывает «угловую» (имеющую углы в поперечном сечении) поверхность текучести в пространстве главных напряжений

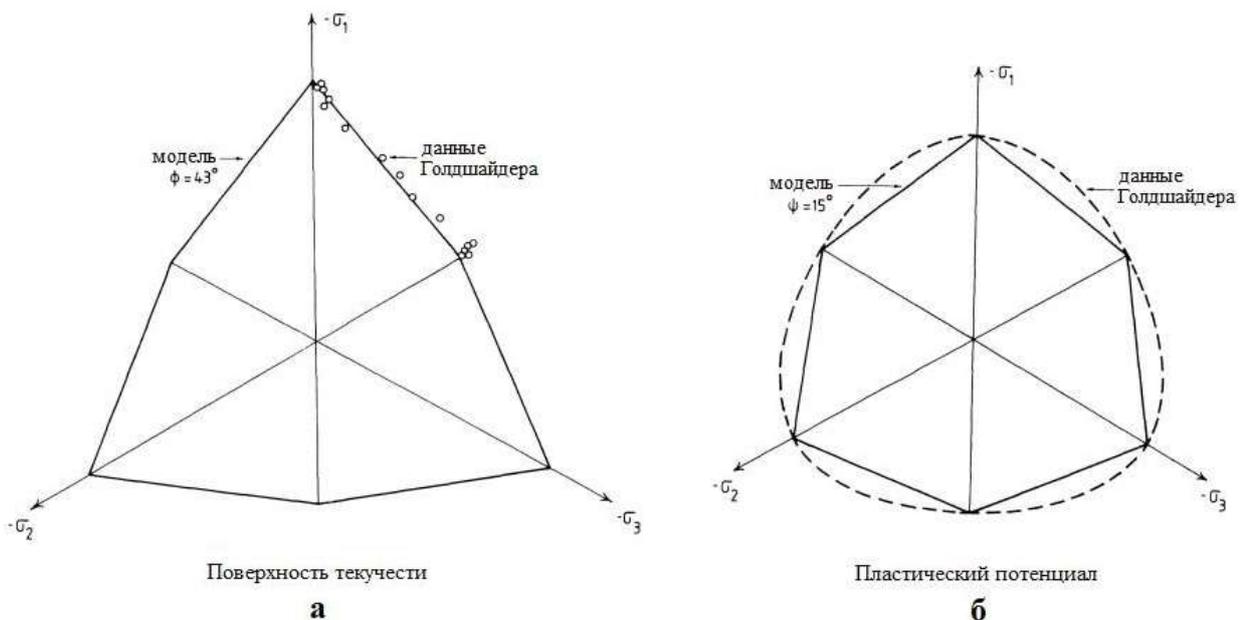


Рис. 5. Поперечные сечения «угловых» поверхностей текучести и пластического потенциала в рамках модели Мора – Кулона в сравнении с данными истинных трехосных испытаний плотного песка

Как обсуждалось в третьей части данного обзора [3] для идеально пластической модели, вывод закона текучести (пластического течения) из функции пластического потенциала возможен при выполнении двух процедур: для точек напряжения в углах и для точек напряжения на плоских сторонах при  $\sigma_1 < \sigma_2 < \sigma_3$ . Для краткости авторы рассматривают только второй случай.

Когда промежуточное главное напряжение ( $\sigma_2$ ) не совпадает с максимальным ( $\sigma_1$ ) или минимальным ( $\sigma_3$ ), функция пластического потенциала является дифференцируемой и подходит обычный закон текучести:

$$\dot{\epsilon}^p = \lambda \frac{\partial g}{\partial \sigma} \quad (8)$$

В отношении главных скоростей деформации это дает следующую формулировку закона текучести:

$$\dot{\varepsilon}_1^p = \lambda \frac{\partial g}{\partial \sigma_1} = -\frac{1}{2}\lambda(1 - \sin \psi^*), \quad (9)$$

$$\dot{\varepsilon}_2^p = \lambda \frac{\partial g}{\partial \sigma_2} = 0, \quad (10)$$

$$\dot{\varepsilon}_3^p = \lambda \frac{\partial g}{\partial \sigma_3} = \frac{1}{2}\lambda(1 + \sin \psi^*). \quad (11)$$

По аналогии с мобилизованным углом внутреннего трения  $\phi^*$  авторы вводят мобилизованный угол дилатансии  $\psi^*$  и получают закон текучести для идеально пластической модели при  $\psi^* = \psi$ . Для разрабатываемой же модели постоянный угол дилатансии недостаточен, поэтому понадобится некая зависимость «напряжение – дилатансия», которую авторы обещают обсудить позже. Теперь же они предлагают использовать представленное в предыдущей части [5] уравнение

$$\bar{\varepsilon}^p = \int \sqrt{\frac{2}{3} \dot{\varepsilon}^p \dot{\varepsilon}^p} dt, \quad (12)$$

чтобы получить следующую формулу:

$$\dot{\varepsilon}^p = \lambda \sqrt{\left[\frac{1}{3}(1 + \sin \phi^* \sin \psi^*)\right]}. \quad (13)$$

Вермеер и Де Борст подчеркивают важность зависимости (13) для эффективной деформации, поскольку она дает возможность рассчитать множитель  $\lambda$ . Для этого расчета авторы используют также уравнение «непротиворечивости»

$$\dot{f} = \frac{\partial f^T}{\partial \sigma} \dot{\sigma} + \frac{\partial f^T}{\partial \bar{\varepsilon}^p} \dot{\bar{\varepsilon}}^p = 0. \quad (14)$$

Комбинация этих двух уравнений дает:

$$\lambda = \frac{1}{h} \frac{\partial f^T}{\partial \sigma} \dot{\sigma}, \quad (15)$$

$$h = -\sqrt{\left[\frac{1}{3}(1 + \sin \phi^* \sin \psi^*)\right]} \frac{\partial f}{\partial \bar{\varepsilon}^p}. \quad (16)$$

Фактически влияние мобилизованного угла дилатансии  $\psi^*$  на модуль упрочнения  $h$  является незначительным (пренебрежимо малым). Чтобы показать это, авторы для примера берут чрезвычайно большой угол дилатансии, равный 20 град., и угол внутреннего трения 35 град. Тогда:

$$\sqrt{(1 + \sin \phi^* \sin \psi^*)} = 1,094, \quad (17)$$

а это означает, что влияние  $\psi^*$  на  $h$  составляет не более 9,4%.

Подставляя выражение для  $\lambda$  в закон текучести и добавляя скорость упругой деформации, Вермеер и Де Борст получают:

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} = \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^e + \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p = \mathbf{D}^{-1} \dot{\boldsymbol{\sigma}} + \frac{1}{h} \frac{\partial g}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \dot{\boldsymbol{\sigma}}, \quad (18)$$

или в инверсной форме:

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \left[ \mathbf{D} - \frac{\mathbf{D} \frac{\partial g}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \mathbf{D}}{h + \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \mathbf{D} \frac{\partial g}{\partial \boldsymbol{\sigma}}} \right] \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}. \quad (19)$$

Авторы указывают, что формула (18) может быть проинтегрирована, когда задана траектория напряжений, а формула (19) должна использоваться, когда надо рассчитать напряжения для заданной траектории деформирования.

### Модуль упрочнения $h$

Модуль упрочнения определяет скорость пластической деформации так же, как модуль Юнга определяет скорость упругой деформации. Вермеер и Де Борст демонстрируют это, рассматривая компрессионное испытание при постоянных  $\sigma_2$  и  $\sigma_3$ :

$$\dot{\varepsilon}_1 = \frac{1}{E} \dot{\sigma}_1 + \frac{1}{h} \frac{\partial g}{\partial \sigma_1} \frac{\partial f}{\partial \sigma_1} \dot{\sigma}_1, \quad (20)$$

или после доработки:

$$\dot{\varepsilon}_1 = \frac{1}{E} \dot{\sigma}_1 + \frac{1}{h} (1 - \sin \psi^*)(1 - \sin \phi^*) \dot{\sigma}_1. \quad (21)$$

В случае незернистых материалов углы внутреннего трения и дилатансии исчезают и авторы получают:

$$\dot{\varepsilon}_1 = \dot{\sigma}_1/E + \dot{\sigma}_1/h, \quad (22)$$

что иллюстрирует аналогию между  $E$  и  $h$ .

Для зернистых же материалов использование углов дилатансии и внутреннего трения усложняет ситуацию, но можно показать, что наклон кривой «напряжение – деформация» в значительной степени определяется модулем упрочнения.

Модуль упрочнения увеличивается почти линейно с ростом меры напряжения  $\sigma^*$ . Из уравнения (16) и функции текучести (1) следует, что

$$h\sqrt{3} \approx -\frac{\partial f}{\partial \bar{\varepsilon}^p} = \sigma^* \frac{\partial \sin \phi^*}{\partial \bar{\varepsilon}^p} + \frac{\partial c^*}{\partial \bar{\varepsilon}^p}. \quad (23)$$

И правда, модуль упрочнения  $h$  становится действительно пропорциональным мере напряжения  $\sigma^*$ , когда исчезает мобилизованное сцепление  $c^*$  или когда величина последнего принимается постоянной.

Далее Вермеер и Де Борст показывают, что модуль упрочнения еще более тесно зависит от эмпирических зависимостей между

$$\sin \phi^* \text{ и } \bar{\varepsilon}^p, \quad (24)$$

$$c^* \text{ и } \bar{\varepsilon}^p. \quad (25)$$

Приведенные в предыдущей части [5] зависимости,

$$\sin \phi^* = 2 \frac{\sqrt{(\bar{\varepsilon}^p \varepsilon^f)}}{\bar{\varepsilon}^p + \varepsilon^f} \sin \phi \quad \text{для } \bar{\varepsilon}^p < \varepsilon^f, \quad (26)$$

$$\sin \phi^* = \sin \phi \quad \text{для } \bar{\varepsilon}^p > \varepsilon^f,$$

предложенные авторами, и полученная ими формула (5), представленная в этой части, таковы, что модуль упрочнения резко уменьшается с увеличением пластической деформации, что на рис. 1 отражено в уменьшении наклона кривых «напряжение – деформация».

### Мобилизованный угол дилатансии

Ранее авторы определили функцию текучести  $f$ , включающую конкретные соотношения для мобилизованного угла внутреннего трения  $\phi^*$  и мобилизованного удельного сцепления  $c^*$ . С другой стороны, функция пластического потенциала  $g$  была введена без точного определения зависимости между

$$\psi^* \text{ и } \bar{\varepsilon}^p. \quad (27)$$

Далее авторы дорабатывают модель с учетом такой зависимости.

Они указывают, что физический смысл мобилизованного угла дилатансии  $\psi^*$  идентичен предельному значению угла дилатансии  $\psi$ , который использовался ранее в неупрочняющейся модели, а именно:

$$\sin \psi^* = \frac{\dot{\varepsilon}_1^p + \dot{\varepsilon}_3^p}{-\dot{\varepsilon}_1^p + \dot{\varepsilon}_3^p} \quad \text{для } \sigma_1 < \sigma_2 < \sigma_3. \quad (28)$$

Это уравнение следует из закона текучести, отраженного в формулах (8–11), и должно рассматриваться как определение.

Для рассматриваемой здесь модели кулоновского типа ситуация  $\sigma_1 < \sigma_2 < \sigma_3$  подразумевает, что

$$\dot{\epsilon}_2^p = 0, \quad (29)$$

так что можно также написать:

$$\sin \psi^* = \frac{\dot{\epsilon}_v^p}{-2\dot{\epsilon}_1^p + \dot{\epsilon}_v^p} \quad (30)$$

при  $\sigma_1 < \sigma_2 < \sigma_3$  и  $\sigma_1 < \sigma_2 = \sigma_3$ .

Авторы предпочитают формулу (30), так как она также может быть использована в случае общепринятых испытаний на трехосное сжатие при  $\sigma_1 < \sigma_2 = \sigma_3$  (см. часть 3 данного обзора [3]).

Вермеер и Де Борст напоминают, что  $\sigma_1$  является основным сжимающим напряжением и что оно отрицательно, поскольку растягивающее напряжение рассматривается как положительное.

Результаты испытаний, представленные на рис. 6–8 (которые уже приводились в части 2 данного обзора [2]), показывают постепенное увеличение скорости дилатансии

$$-\dot{\epsilon}_v^p / \dot{\epsilon}_1^p \quad (31)$$

вплоть до предельной величины при пиковом напряженном состоянии. Как следствие, мобилизованный угол дилатансии  $\psi^*$  постепенно увеличивается до предельного угла дилатансии  $\psi$ , который был использован в неупрочняющейся модели.

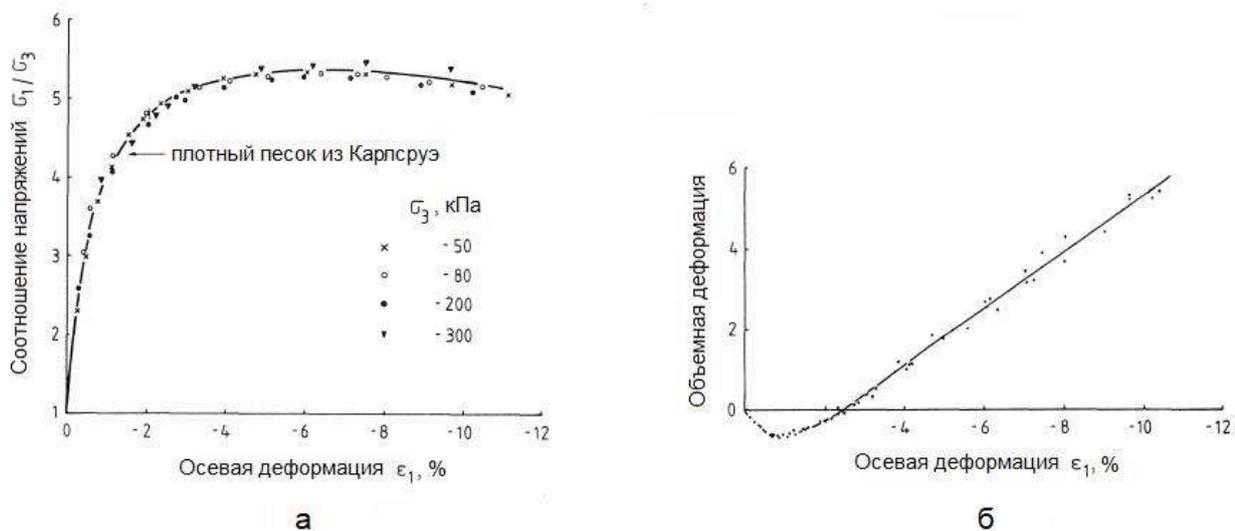
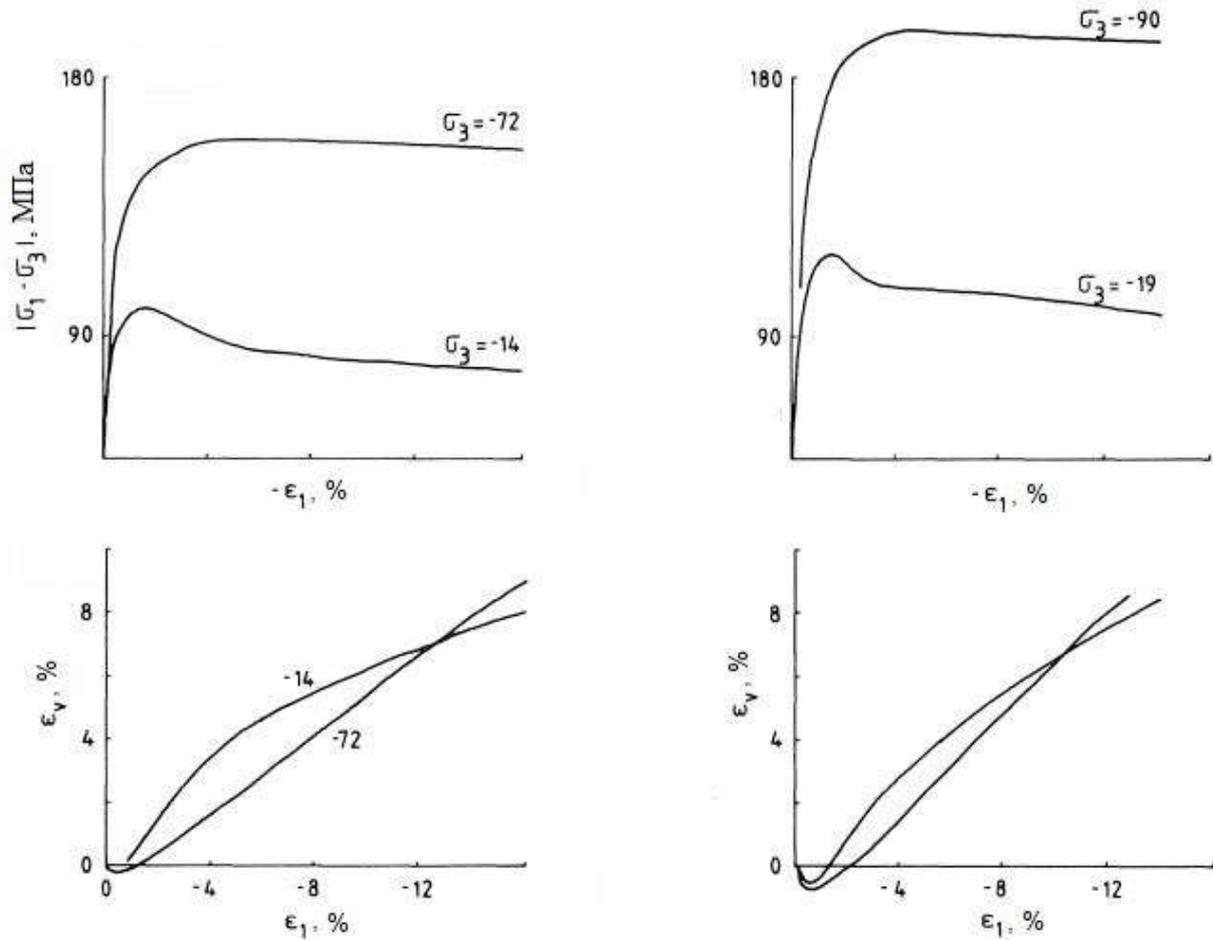


Рис. 6. Результаты трехосных испытаний плотного песка



Испытания микротрещиноватого мрамора (а)

Испытания ненарушенного мрамора (б)

Рис. 7. Графики по данным трехосных испытаний скальных грунтов (здесь нет принципиальной разницы между результатами для разбитой микротрещинами и ненарушенной скальной породы)

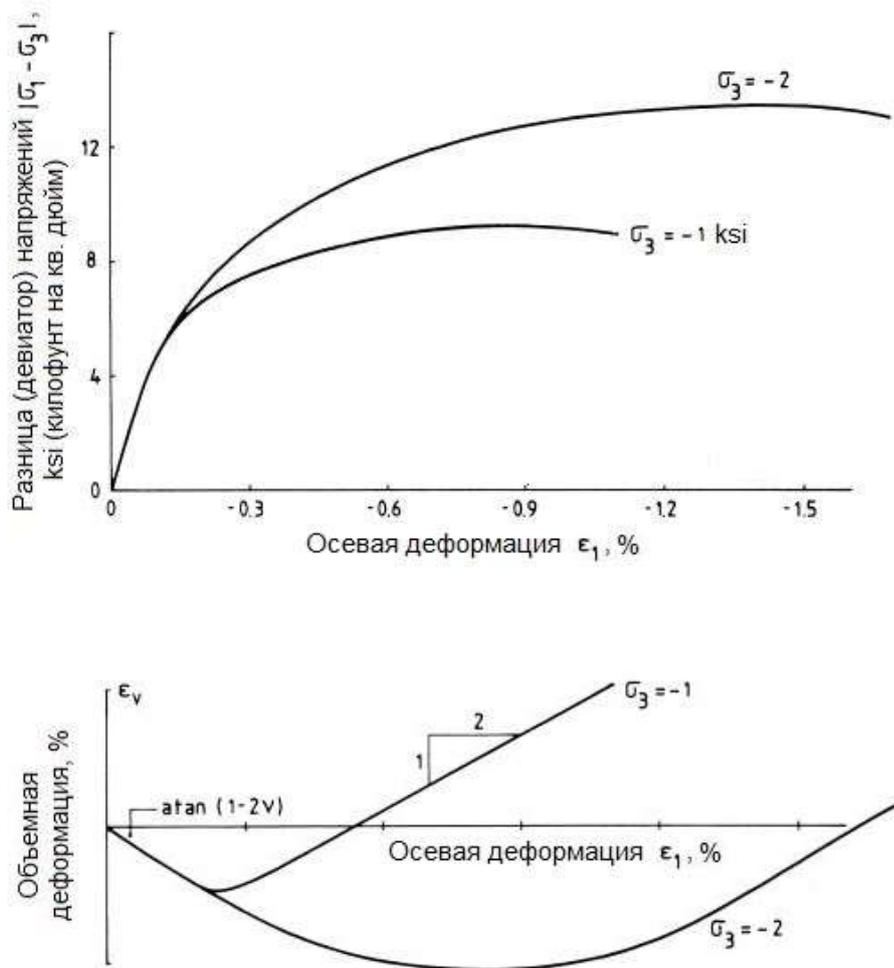


Рис. 8. Результаты трехосных испытаний высокопрочного бетона

Постепенное увеличение мобилизованного угла дилатансии авторы собираются смоделировать путем принятия зависимости между

$$\psi^* \text{ и эффективной деформацией } \bar{\epsilon}^p. \quad (32)$$

В механике грунтов наиболее популярным подходом было найти зависимость между

$$\text{степенью дилатансии } -\dot{\epsilon}_v^p / \dot{\epsilon}_1^p \text{ и соотношением напряжений типа } \sigma_1 / \sigma_3 \quad (33)$$

или эквивалентно мобилизованному углу внутреннего трения.

Авторы сообщают, что ранее было предложено несколько более или менее теоретических зависимостей. Так, Роскоу с соавторами (Roscoe et al., 1963) предложили однопараметрическое уравнение на основе энергетических соображений. Роу (Rowe, 1971), вывел еще одно однопараметрическое уравнение:

$$1 - \dot{\varepsilon}_v^p / \dot{\varepsilon}_1^p = \left\{ \frac{\tan(45^\circ + \phi^*/2)}{\tan(45^\circ + \phi_{cv}/2)} \right\}^2, \quad (34)$$

где  $\phi_{cv}$  является константой, которую называют *углом внутреннего трения при постоянном объеме*. Это название логично, так как из уравнения (34) следует, что

$$\dot{\varepsilon}_v^p = 0 \quad \text{при} \quad \phi^* = \phi_{cv}. \quad (35)$$

Действительно, уравнение (34) предсказывает отрицательную дилатансию для малых мобилизованных углов внутреннего трения ( $\phi^* < \phi_{cv}$ ) и положительную для больших ( $\phi^* > \phi_{cv}$ ). Эта константа соответствует точке плавного поворота, в которой прекращается пластическое сжатие и начинается дилатансия.

Авторы отмечают, что для песка некоторые исследователи (например, Страуд (Stroud, 1971) и Вермеер (Vermeer, 1978)) подтвердили правильность уравнения (34), включая пластическое сжатие в начале нагружения. Для несвязных зернистых материалов такое сжатие является вполне возможным и связано с пластической деформацией из-за смещений отдельных частиц, тогда как положительная дилатансия (расширение) связана с продолжающейся пластической деформацией из-за проскальзывания между группами частиц. С другой стороны, нельзя ожидать пластического сжатия при нагружении твердого бетона или непористых скальных пород, потому что в них нет пустот, которые могли бы быть заполнены. Для таких твердых материалов, как отмечают авторы, уравнение (34) представляется полезным только в диапазоне  $\phi^* > \phi_{cv}$ , для которого прогнозируется положительная дилатансия.

Вермеер и Де Борст собираются далее использовать предложенное Роу уравнение (34), описывающее связь «напряжение – дилатансия», поскольку оно простое и точное. И хотя, как уже отмечалось выше, было доказано только то, что оно является точным для песка, авторы ожидают от него удовлетворительной точности и в отношении бетона и скальных пород. Однако они считают, что его будет удобнее использовать в другом виде. Скомбинировав уравнения (30) и (34) и убрав из них отношение деформаций

$\dot{\varepsilon}_v^p / \dot{\varepsilon}_1^p$ , можно получить более удобную его форму:

$$\sin \psi^* = \frac{\sin \phi^* - \sin \phi_{cv}}{1 - \sin \phi^* \sin \phi_{cv}}. \quad (36)$$

Это и есть искомая авторами зависимость между мобилизованным углом дилатансии и эффективной деформацией, поскольку

$$\phi^* \text{ является функцией } \bar{\varepsilon}^p. \quad (37)$$

Мобилизованный угол дилатансии  $\psi^*$  первоначально отрицателен и увеличивается с ростом  $\phi^*$ , то есть при увеличении эффективной деформации. Однако Вермеер и Де Борст подчеркивают, что отрицательные значения  $\psi^*$  не должны использоваться для твердых материалов и что вместо этого может быть полезным условие  $\psi^* = 0$  град. для  $\phi^* < \phi_{cv}$ . Константа  $\phi_{cv}$  легко рассчитывается по предельному углу дилатансии  $\psi$  и предельному углу внутреннего трения  $\phi$ . Подставив  $\phi^* = \phi$  и  $\psi^* = \psi$  в уравнение (36) и перегруппировав его, авторы получают:

$$\sin \phi_{cv} = \frac{\sin \phi - \sin \psi}{1 - \sin \phi \sin \psi} \quad (38)$$

Используя конкретные данные для бетона, представленные на рис. 8, и уравнение (38), можно получить:  $\phi=35^\circ$ ,  $\psi=12,6^\circ$  и, следовательно,  $\phi_{cv}=24^\circ$ . Это немного ниже диапазона  $25^\circ < \phi < 33^\circ$ , который был известен авторам для кварцевых песков на момент написания рассматриваемой работы [6].

### Обсуждение разработанной модели

Песок, скальные породы и бетон являются сложными материалами, и их механическое поведение, безусловно, не полностью описывается идеализацией изотропного упрочнения и разупрочнения. Однако, как подчеркивают авторы, эта идеализация устанавливает баланс между точностью и простотой. Благодаря такой комбинации изотропное упрочнение потенциально способно дать инженеру истинное понимание поведения материала. Но это преимущество теряется, когда при разработке модели применяются сложные функции. Главным образом по этой причине Вермеер и Де Борст и используют кулоновскую поверхность текучести и поверхность пластического потенциала сходной формы.

При этом авторы отмечают, что были предложены и другие полезные поверхности текучести. Например, ранее Вермеером (Vermeer, 1984) применялась сходная гладкая поверхность текучести в так называемой модели с двойным упрочнением. Ладе (Lade, 1983) и Шрейер с Бэбкоком (Schreyer, Babcock 1984) использовали еще одну функцию для поверхности текучести бетона. Другие варианты приводились, например, Виллэмом и Вонке (Willam, Warnke, 1974), а также Ченом (Chen, 1982). Однако, как подчеркивают Вермеер и Де Борст, конкретный выбор поверхности текучести не влияет на изложенные здесь основные идеи.

Авторы указывают, что для ситуаций с плоской деформацией использование компьютерной программы на основе рассматриваемой модели является простым, но для обработки напряженных состояний на вершине конуса текучести нужна специальная подпрограмма, желательная позволяющая иметь дело с любым углом поверхности текучести. Такая подпрограмма также необходима при решении осесимметричных или общих трехмерных задач из-за появления ребер на поверхности текучести. Ребра (общие углы) также должны появляться, когда вводятся так называемые усечения в областях растяжения. Для когезионно-фрикционных материалов вершина кулоновской поверхности обычно отрезается, поскольку простое кулоновское условие текучести допускало бы слишком большие растягивающие напряжения. Усечение в области растяжения также вызывает сингулярность (единственность) на пересечении с кулоновской поверхностью.

Из вышеизложенных соображений, как считают авторы, следует, что полученная модель должна быть расширена так, чтобы включить усечение в области растяжения, когда материал является связным. Причем важность этого расширения возрастает с увеличением первоначального удельного сцепления  $c$ . Значимость других расширений зависит от пористости материала.

В качестве примера Вермеер и Де Борст рассматривают образец песка под гидростатической нагрузкой. В этом случае можно ожидать некоторого уплотнения, то есть пластического сокращения объема из-за изотропности напряжений (нагружения). Действительно, рыхлые пески характеризуются высоким уплотнением (уменьшением объема), а плотные пески показывают умеренные пластические изменения объема примерно той же величины, что и упругие его изменения.

Пористые скальные породы, как отмечают авторы, демонстрируют то же самое, особенно когда давление превышает пороговое значение, после которого цементационные

связи между зернами начинают разрушаться. Бетон обычно не очень пористый, но даже в его случае это заметно.

Пластическое изменение объема при гидростатической нагрузке не описывается кулоновской поверхностью текучести, поскольку она открыта в направлении гидростатического давления. Чтобы учесть поведение материалов под гидростатической нагрузкой, нужно ввести дополнительную поверхность, закрывающую открытую часть кулоновской поверхности неким подобием «шапки» (*cap*), или «шатра». Авторы отмечают, что это дает угол между двумя указанными поверхностями на их пересечении. Они напоминают, что, например, Ди Маджо и Сэндлер (DiMaggio, Sandler, 1971) использовали сглаженное их пересечение, но считают, что в рассматриваемой модели достичь этого практически нереально (Vermeer, 1978, 1984).

Вермеер и Де Борст также сообщают, что в последние перед написанием рассматриваемой работы [6] годы наблюдалась растущая тенденция к моделированию пластичности с помощью углов или граней поверхности текучести. Примерами этого являются работы Мандела (Mandel, 1965), а также Рудницкого и Райса (Rudnicki, Rice, 1975).

Модель упрочнения-разупрочнения использует семь констант, что на две больше, чем в модели, не учитывающей упрочнение и разупрочнение. Дополнительными константами являются  $\varepsilon^f$  и  $\varepsilon^c$ , используемые соответственно

в зависимости между  $\phi^*$  и  $\bar{\varepsilon}^p$  (в формуле (26)) (39)

и в зависимости между  $c^*$  и  $\bar{\varepsilon}^p$  (в формуле (5)). (40)

Константа  $\varepsilon^f$  представляет собой деформацию, необходимую для мобилизации предельного угла внутреннего трения, а  $\varepsilon^c$  – деформацию, которая нужна для уменьшения сцепления. Комбинация фрикционного упрочнения и когезионного разупрочнения кажется очень подходящей, но для проверки взаимосвязей с эффективной деформацией, предложенных в рассматриваемом исследовании, как считают его авторы, необходимо детальное изучение опубликованных результатов испытаний и возможный поиск немного отличающихся и более подходящих зависимостей.

По аналогии с  $\phi^*$  и  $c^*$  Вермеер и Де Борст также вывели зависимость между мобилизованным углом дилатансии и эффективной деформацией, то есть между

$\psi^*$  и  $\bar{\varepsilon}^p$ , (41)

в соответствии с теорией дилатансионного деформирования Роу (Rowe), которая оказалась точной для песка, но в какой-то степени недостаточно продуманной для цементированных зернистых материалов. И в этом случае, по мнению авторов, необходима доработка решения этой задачи путем детального изучения результатов испытаний. Внимание должно быть сосредоточено на поведении, связанном с допиковым упрочнением, а не на экспериментальных результатах для постпикового разупрочнения, которые будут необъективными, поскольку образцы разного размера дают разное постпиковое поведение из-за неоднородности деформаций в каждом из них. Авторы сообщают, что Рудницкий и Райс (Rudnicki, Rice, 1975) проанализировали эту неоднородность для хрупких скальных пород, Вардолакис (Vardoulakis, 1980) сделал то же самое для песка, а Ван Миэр (Van Mier, 1983) измерил эту неоднородность для конкретных образцов. Ссылки на статьи упоминаемых исследователей приведены в списке литературы в конце обсуждаемой работы [6].

Продолжение обзора работы Вермеера и Де Борста [6] будет приведено в следующей части, где будет показано, что рассмотренная модель предсказывает неоднородные деформации незадолго до и сразу после пика.

### Список литературы

1. Обзор работы Вермеера и Де Борста о неассоциированной пластичности грунтов и бетона. Часть 1. Общее содержание // Geoinfo.ru. 17.06.2019. URL: <https://www.geoinfo.ru/product/analiticheskaya-sluzhba-geoinfo/obzor-raboty-vermeera-i-deborsta-o-neassociirovannoj-plastichnosti-gruntov-i-betona-chast-1-obshchee-soderzhanie-40928.shtml>.
2. Обзор работы Вермеера и Де Борста о неассоциированной пластичности грунтов и бетона. Часть 2 // Geoinfo.ru. 25.06.2019. URL: <https://www.geoinfo.ru/product/analiticheskaya-sluzhba-geoinfo/obzor-raboty-vermeera-i-deborsta-o-neassociirovannoj-plastichnosti-gruntov-i-betona-chast-2-41014.shtml>.
3. Обзор работы Вермеера и Де Борста о неассоциированной пластичности грунтов и бетона. Часть 3 // Geoinfo.ru. 08.07.2019. URL: <https://www.geoinfo.ru/product/analiticheskaya-sluzhba-geoinfo/obzor-raboty-vermeera-i-deborsta-o-neassociirovannoj-plastichnosti-gruntov-i-betona-chast-3-41059.shtml>.
4. Обзор работы Вермеера и Де Борста о неассоциированной пластичности грунтов и бетона. Часть 4 // Geoinfo.ru. 15.07.2019. URL: <https://www.geoinfo.ru/product/analiticheskaya-sluzhba-geoinfo/obzor-raboty-vermeera-i-deborsta-o-neassociirovannoj-plastichnosti-gruntov-i-betona-chast-4-41085.shtml>.
5. Обзор работы Вермеера и Де Борста о неассоциированной пластичности грунтов и бетона. Часть 5 // Geoinfo.ru. 24.07.2019. URL: <https://www.geoinfo.ru/product/analiticheskaya-sluzhba-geoinfo/obzor-raboty-vermeera-i-deborsta-o-neassociirovannoj-plastichnosti-gruntov-i-betona-chast-5-41127.shtml>.
6. *Vermeer P.A., De Borst R.* Non-associated plasticity for soils, concrete and rock // Heron. 1984. Vol. 29. № 3. URL: <https://repository.tudelft.nl/islandora/object/uuid:4ee188ab-8ce0-4df3-adf5-9010ebfaabf0>.