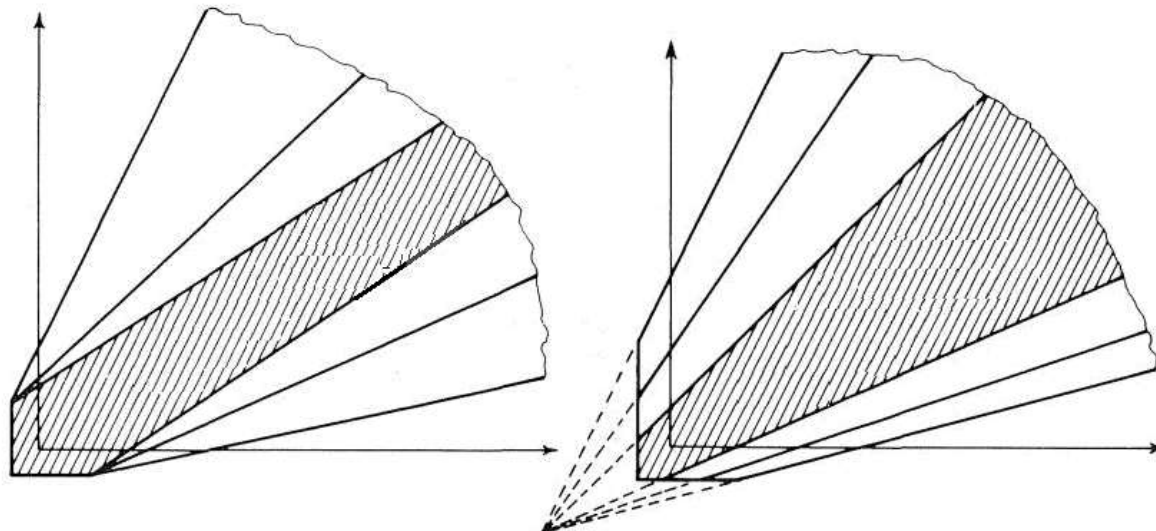


## Обзор работы Вермеера и Де Борста о неассоциированной пластичности грунтов и бетона. Часть 5



Продолжаем публикацию обзора работы П.А. Вермеера и Р. Де Борста «Неассоциированная пластичность для дисперсных грунтов, бетона и скальных пород» [4], опубликованной в 1984 году в голландском журнале *Hegeon* на английском языке. В первой части [1] мы кратко описали ее общее содержание, во второй [2] подробнее рассмотрели дилатансию и трехосные испытания, в третьей [3] – модель, пренебрегающую эффектами упрочнения и разупрочнения материалов (так называемую неупрочняющуюся модель), в четвертой [4] – некоторые последствия неассоциированной пластичности. Здесь речь пойдет об изотропном упрочнении.

Аналитическая службы  
[info@geoinfo.ru](mailto:info@geoinfo.ru)

### Параметр изотропного упрочнения

П.А. Вермеер и Р. Де Борст в своей работе «Неассоциированная пластичность для дисперсных грунтов, бетона и скальных пород» [4] отмечают, что модель, не учитывающая упрочнение или разупрочнение (так называемая неупрочняющаяся модель), очень полезна для решения задач по разрушению, поскольку в этом случае предельные и остаточные нагрузки могут быть рассчитаны достаточно точно.

С другой стороны, как указывают авторы, принятие идеальной пластичности меньше подходит для изучения развития смещений при рабочих нагрузках, поскольку указанный тип модели дает значительную переоценку диапазона упругости. Для этого гораздо лучше подходит так называемая *теория пластичности с упрочнением* (которая с теоретической точки зрения мало чем отличается от теории идеальной пластичности). В этом случае скорость деформации опять же делится на две аддитивных составляющих. Упругий вклад возникает при всех изменениях напряжения, а пластическая составляющая может возникать, когда напряжения удовлетворяют условию текучести  $f=0$  (равенству нулю

функции текучести). Следовательно, упрочняющаяся модель аналогично неупрочняющейся включает следующие уравнения:

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} = \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^e + \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p, \quad (1)$$

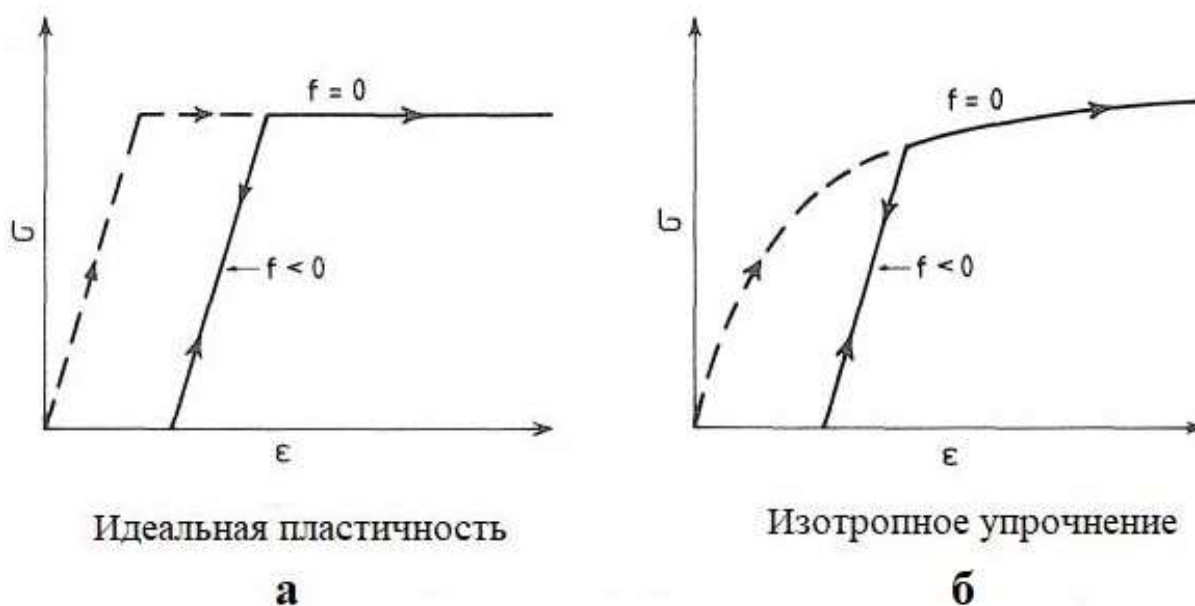
$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^e = \mathbf{D}^{-1} \dot{\boldsymbol{\sigma}}, \quad (2)$$

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p = \lambda \frac{\partial g}{\partial \boldsymbol{\sigma}}. \quad (3)$$

Множитель  $\lambda$  исчезает для вариаций напряжений в диапазоне упругости и при разгрузке, то есть соответственно при

$$f < 0 \text{ и } \dot{f} < 0. \quad (4)$$

Отличие от теории идеальной пластичности связано с размером упругого диапазона и, следовательно, с функцией текучести  $f$ . Это различие показано на рис. 1.



**Рис. 1.** Для изотропного упрочнения диапазон упругости увеличивается с ростом пластической деформации [5]

При пластичности с упрочнением диапазон упругости зависит от пластической деформации рассматриваемого материального элемента. В этом случае, когда изначально небольшой упругий диапазон увеличивается в зависимости от пластической деформации, но центр поверхности текучести не изменяется в процессе нагружения, говорят об *изотропном упрочнении*. Поэтому, как указывают авторы, в функцию текучести  $f$  должна войти некая мера пластической деформации и условие текучести должно иметь следующий вид:

$$f(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \kappa) = 0, \quad (5)$$

по крайней мере для изотропного упрочнения. Скалярный параметр  $\kappa$  представляет собой некий функционал истории пластической деформации и обычно называется *параметром упрочнения*.

При использовании такой функции текучести, как указывают Вермеер и Де Борст, можно показать, что в материале, не подверженном напряжениям, отсутствуют эффекты ориентации, поэтому этот материал остается изотропным.

В качестве простого примера возможного определения параметра упрочнения авторы приводят объемную пластическую деформацию:

$$\varepsilon_v^p = \varepsilon_1^p + \varepsilon_2^p + \varepsilon_3^p. \quad (6)$$

Они указывают, что этот конкретный выбор полезен для сильносжимаемого материала, такого как глина, и что в целом диапазон упругости будет зависеть не только от текущей пластической деформации, но и от истории ее развития (поэтому, если быть точными, диапазон упругости является функционалом, а не функцией пластической деформации). Очевидно, считают авторы, это может привести к более сложной теории, чего можно избежать, если принять, что история пластической деформации также может быть отражена в параметре упрочнения. Например, при рассмотрении пластичности металлов это как раз и достигается через параметр упрочнения:

$$\bar{\varepsilon}^p = \int \sqrt{\frac{2}{3} \dot{\varepsilon}^p \dot{\varepsilon}^p} dt, \quad (7)$$

или в терминах главных скоростей деформации:

$$\bar{\varepsilon}^p = \int \sqrt{\frac{2}{3} (\dot{\varepsilon}_1^p \dot{\varepsilon}_1^p + \dot{\varepsilon}_2^p \dot{\varepsilon}_2^p + \dot{\varepsilon}_3^p \dot{\varepsilon}_3^p)} dt. \quad (8)$$

Коэффициент  $2/3$  подходит для оценки результатов одноосных испытаний. Поскольку у металлов нет пластических изменений объема, для напряженного металлического стержня под нагрузкой

$$\varepsilon_2^p = \varepsilon_3^p = -0,5\varepsilon_1^p \quad (9)$$

(при одноосном испытании  $\varepsilon_v^p = 0$ ).

Тогда так называемая эффективная деформация просто совпадает с одноосной пластической деформацией:

$$\bar{\varepsilon}^p = |\varepsilon_1^p| \quad (10)$$

(при одноосных испытаниях  $\varepsilon_v^p = 0$ ).

Авторы указывают, что вместо интеграла эффективной (истинной) деформации иногда используется пластическая работа, выполняемая в процессе деформации:

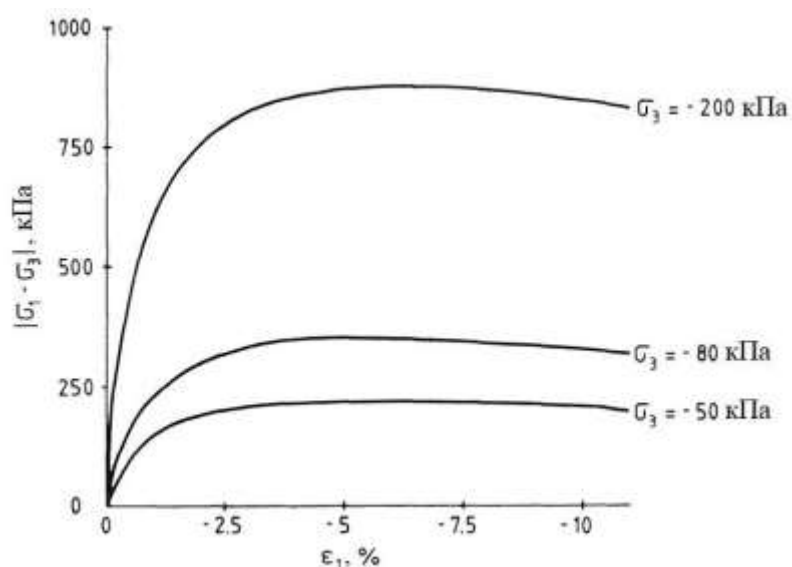
$$W^p = \int \sigma^T \dot{\epsilon}^p dt. \quad (11)$$

Они отмечают, что при рассмотрении пластичности металлов вполне возможно использование пластической работы, поскольку это приводит к модели, которая полностью эквивалентна модели, в которой применяется эффективная деформация. Действительно, для критерия (функции) текучести Фон Мизеса для металлов оба определения дают абсолютно одинаковые результаты. Некоторые последние модели грунта, созданные к моменту написания рассматриваемой работы, также были основаны на концепции пластической работы, но Вермеер и Де Борст указывают, что для зернистых материалов (как несцементированных, так и сцементированных) эффективная деформация не эквивалентна пластической работе и подходит гораздо больше.

Кроме того, авторы напоминают, что было проведено много экспериментов на образцах песка для оценки наилучшего определения параметра упрочнения. В том числе Страуд (Stroud, 1971), а также Тацуока и Ишихара (Tatsuoka, Ishihara, 1975) сообщали о результатах, количественно очень близких к эффективной деформации. Поэтому Вермеер и Де Борст основывают последующие выкладки на параметре, который точно или приблизительно равен ей.

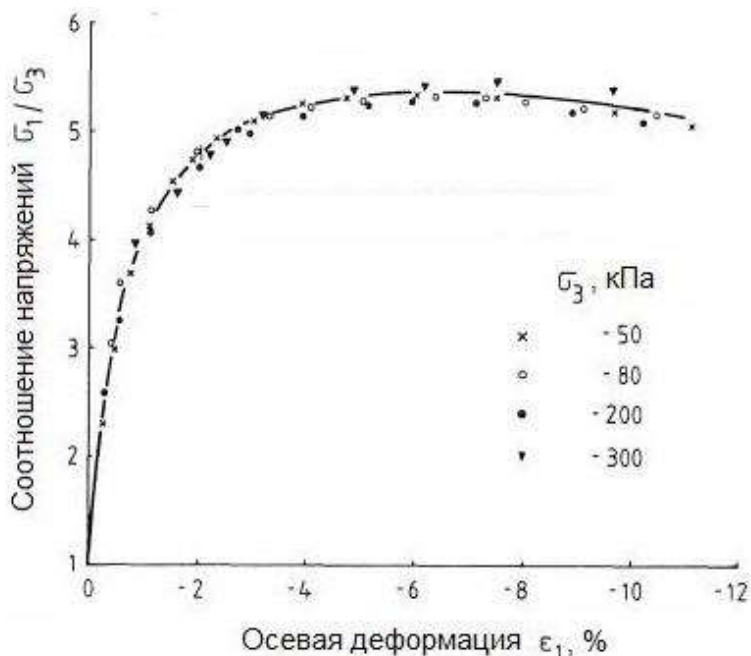
### Фрикционное упрочнение для песка

На рисунке 2 авторы показали результаты трехосных испытаний плотного песка из Карлсруэ по данным Хеттлера и Вардолакиса (Hettler, Vardoulakis, 1984). Ход этих графиков является сходным для разных осевых напряжений: вслед за первоначально жестким поведением кривая «напряжение сдвига – осевая деформация» имеет сглаженный максимум. Пиковая прочность с ростом радиального напряжения  $\sigma_3$  увеличивается почти линейно.



**Рис. 2.** Результаты трехосных испытаний плотного песка из Карлсруэ по данным Хеттлера и Вардолакиса (Hettler, Vardoulakis, 1984) [5]

Чтобы получить единую характерную кривую для всех указанных компрессионных испытаний, Вермеер и Де Борст заменили напряжение сдвига отношением главных напряжений  $\sigma_1/\sigma_3$ . Результат представлен на рис. 3 (который уже был представлен в части 2 данного обзора [2]).



**Рис. 3.** Результаты трехосных испытаний плотного песка из Карлсруэ по данным Хеттлера и Вардолакиса (Hettler, Vardoulakis, 1984) [2, 5]

Поэтому, как указывают авторы, для испытаний с постоянным  $\sigma_3$  существует зависимость следующего вида:

$$f(\sigma_1/\sigma_3, \epsilon_1^p) = 0. \quad (12)$$

Вермеер и Де Борст считают, что необходимо сделать ограничение на увеличение соотношения напряжений, так как разгрузка и повторное нагружение показывают различное более или менее упругое поведение. При этом они отмечают, что использование отношения главных напряжений не является строго необходимым и можно применять такие меры напряжения, как  $\tau^*$  и  $\sigma^*$ , которые ранее использовались в функции текучести для неупрочняющейся модели:

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= -(\sigma^* + \tau^*), \\ \sigma_3 &= -\sigma^* + \tau^*, \\ \sigma_1/\sigma_3 &= (\sigma^* + \tau^*)/(\sigma^* - \tau^*). \end{aligned} \quad (13)$$

Это подразумевает, что в условии текучести вместо соотношения  $\sigma_1/\sigma_3$  может быть использовано отношение  $\tau^*/\sigma^*$  в следующем виде:

$$f(\tau^*/\sigma^*, \varepsilon_1^p) = 0. \quad (14)$$

Чтобы в дополнение к обычным испытаниям с постоянным напряжением  $\sigma_3$  охватить и другие тесты, авторы заменяют осевую деформацию на более общую эффективную деформацию, то есть:

при замене  $\varepsilon_1^p$  на  $\bar{\varepsilon}^p$  получается условие

$$f(\tau^*/\sigma^*, \bar{\varepsilon}^p) = 0. \quad (15)$$

В дальнейшем авторы используют следующее эквивалентное условие:

$$f = \tau^* - \sigma^* \sin \phi^* = 0, \text{ или } \tau^* = \sigma^* \sin \phi^*, \quad (16)$$

где  $\sin \phi^*$  – некая функция эффективной деформации.

Такое представление условия текучести Вермеер и Де Борст выбрали потому, что оно имеет очень близкое сходство с «неупрочняющимся» условием текучести, которое приводилось в части 3 [3]:

$$\tau^* - \sigma^* \sin \phi - c \cos \phi \leq 0. \quad (17)$$

Но теперь вместо постоянного угла внутреннего трения  $\phi$  авторы используют зависящий от деформации параметр  $\phi^*$ , который называют *мобилизованным углом внутреннего трения*.

Вермеер и Де Борст отмечают, что, как показывает опыт, кривые, построенные по результатам испытаний песка, обычно можно описать в простой форме, например в виде следующих зависимостей:

$$\sin \phi^* = 2 \frac{\sqrt{(\bar{\varepsilon}^p \varepsilon^f)}}{\bar{\varepsilon}^p + \varepsilon^f} \sin \phi \quad \text{для } \bar{\varepsilon}^p < \varepsilon^f, \quad (18)$$

$$\sin \phi^* = \sin \phi \quad \text{для } \bar{\varepsilon}^p > \varepsilon^f.$$

Так что мобилизованный угол внутреннего трения постепенно увеличивается с ростом деформации, в конце концов доходя до предельной величины при достижении равенства

$$\bar{\varepsilon}^p = \varepsilon^f, \quad (19)$$

где  $\varepsilon^f$  – константа.

Авторы указывают, что другие полезные формулы приводятся в работе Хансена (Hansen, 1965), на которую есть ссылка в приведенном ими списке литературы [5].

Вермеер и Де Борст считают, что для несцементированного зернистого материала очень хорошо подходит концепция фрикционного упрочнения. Для примера они

рассматривают совокупность жестких неразрушаемых частиц, находящихся в статическом равновесии при интенсивности вертикальной и горизонтальной нагрузки  $\sigma_1$  и  $\sigma_3$  соответственно. Тогда пропорциональное увеличение  $\sigma_1$  и  $\sigma_3$  приведет к пропорциональному росту сил взаимодействия между частицами в точках контактов между ними, так что направления этих сил останутся теми же. С другой стороны, изменение соотношения  $\sigma_1/\sigma_3$  изменит направление «контактных» сил и приведет к проскальзыванию в ряде контактных точек. Появление проскальзывания между частицами подразумевает перегруппировку этих частиц, то есть пластическую деформацию в макроскопическом смысле.

Таким образом, делают вывод авторы, пластическая деформация связана только с отношением напряжений, что было сформулировано выше в виде функции текучести и подтверждено данными испытаний, показанными на рис. 3. Здесь они отмечают, что результаты испытаний, представленные на рис. 2 и 3, были получены для чистого кварцевого песка с очень твердыми и крепкими зёрнами. Другие пески имеют более мягкие частицы с ломкими краями, и в этом случае данные испытаний не полностью соответствуют чисто фрикционному упрочнению. Тогда, как указывают Вермеер и Де Борст, следует модифицировать функцию текучести, сделав  $\phi^*$  также функцией меры уровня напряжения, такой как  $\sigma^*$ . Подробности они предлагают узнать в чуть более ранней работе Вермеера (Vermeer, 1984, см. список литературы в обсуждаемой работе [5]).

### Связь между фрикционным и когезионным упрочнением

Авторы подчеркивают, что вышеупомянутое условие текучести не может быть применено по отношению к бетону или скальной породе напрямую, поскольку оно не учитывает когезионной прочности (т.е. прочности за счет увеличения связности). Для таких связных материалов они расширяют условие текучести до следующего уравнения:

$$\tau^* = \sigma^* \sin \phi^* + c \cos \phi^* . \quad (20)$$

При увеличении значения  $\phi^*$  до  $\phi$  эта формула дает условие текучести, которое ранее использовалось в неупрочняющейся модели и приводилось в части 3 данного обзора [3]:

$$f = \tau^* - \sigma^* \sin \phi - c \cos \phi . \quad (21)$$

Однако Вермеер и Де Борст отмечают, что использование формулы (20) – не единственная возможность для моделирования конкретного поведения, и обещают рассмотреть ниже другое условие текучести.

Далее авторы напоминают, что модели, учитывающие изотропное упрочнение, были изначально разработаны для изучения металлов и включали условия текучести в следующей форме:

$$\tau^* = c^*, \quad c^* = c^0 + h \bar{\epsilon}^p \quad (22)$$

или в виде нелинейных соотношений между  $c^*$  и  $\bar{\epsilon}^p$  с константами, подобными  $c^0$  и  $h$ .

Вермеер и Де Борст считают, что этот тип упрочнения (для  $h > 0$ ) можно отнести к когезионному, поскольку связность здесь увеличивается как функция эффективной деформации. Они обращают внимание читателей на то, что многие авторы публикаций по пластичности металлов используют при одноосном растяжении предел текучести, а не мобилизованное сцепление  $c^*$ , но это не важно, поскольку одноосный предел текучести вдвое больше, чем мобилизованное сцепление.

Для учета трения авторы расширяют концепцию когезионного упрочнения и получают условие текучести следующего вида:

$$\tau^* = \sigma^* \sin \phi + c^* \cos \phi. \quad (23)$$

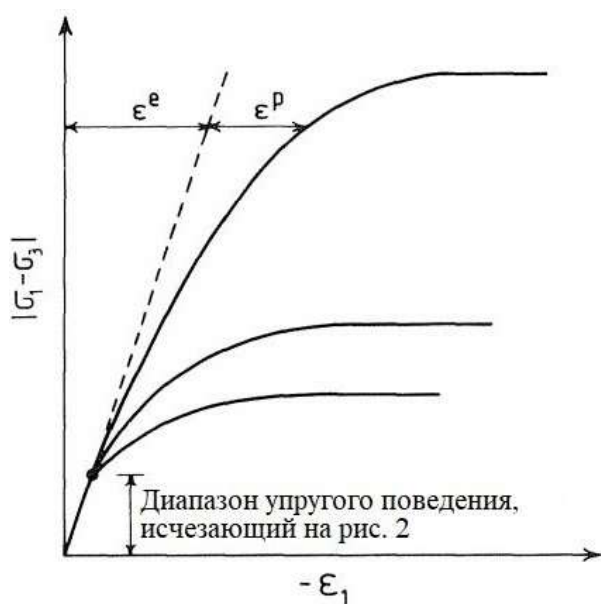
Авторы отмечают, что математически здесь мало разницы с формулой для фрикционного упрочнения (20), но когезионное упрочнение дает совершенно другие кривые «напряжение – деформация», как показано на рис. 4. Для фрикционного упрочнения различные испытания на трехосное сжатие имеют одинаковый диапазон упругости, тогда как для когезионного этот диапазон увеличивается с ростом радиального напряжения  $\sigma_3$ . Диапазон упрочнения, отраженный на рис. 4, а, определяется соотношением (18) между

$$\sin \phi^* \text{ и } \bar{\epsilon}^p \quad (24)$$

и аналогичной нелинейной зависимостью между

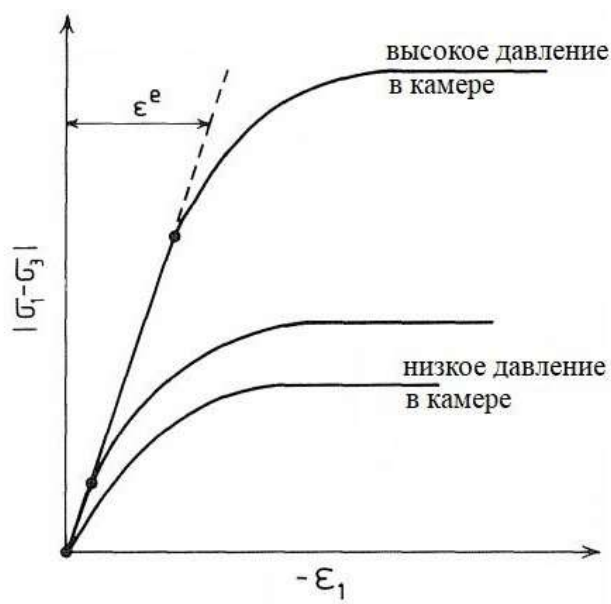
$$c^* \text{ и } \bar{\epsilon}^p, \quad (25)$$

использованной на рис. 4, б.



Фрикционное упрочнение

**а**



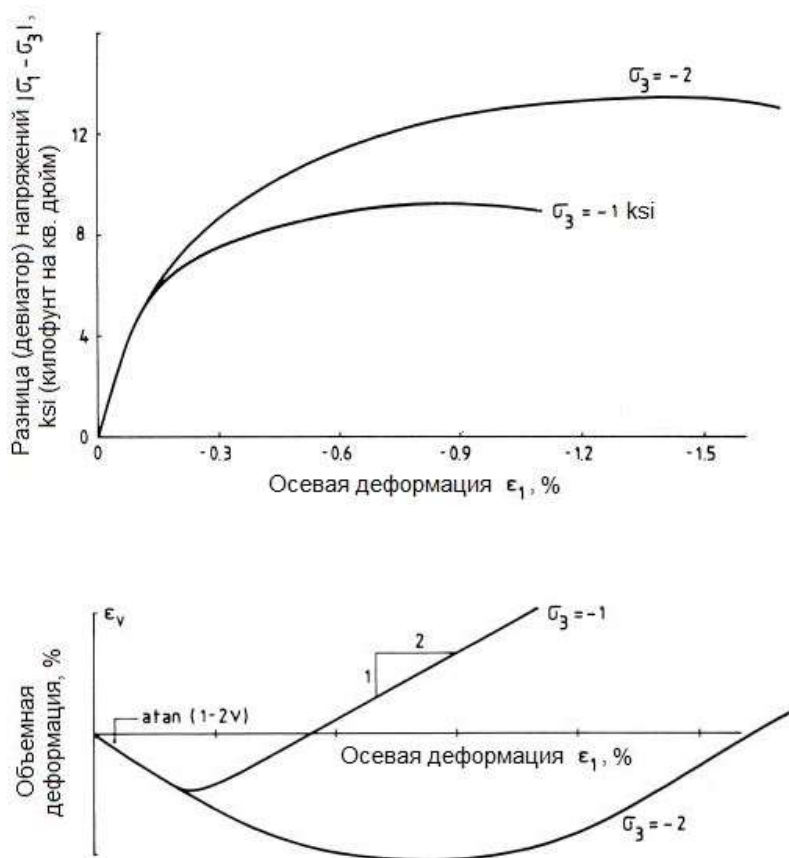
Когезионное упрочнение

**б**



**Рис. 4.** Фрикционное упрочнение отличается от когезионного упрочнения размером диапазона упругости

Экспериментальные данные, представленные на рис. 5 (который уже приводился во второй части данного обзора [2]), показывают, что реакции бетона гораздо лучше соответствует фрикционному упрочнению, чем когезионному. Поэтому авторы указывают, что чисто когезионное упрочнение не является в данном случае привлекательным и последней (к моменту написания рассматриваемой работы) тенденцией в моделировании поведения бетона является использование формулы (18) для фрикционного упрочнения, как, например, в статье Шрейера (Schreyer, 1983), на которую есть ссылка в списке литературы у Вермеера и Де Борста [5].



**Рис. 5.** Результаты трехосных испытаний высокопрочного бетона

Вермеер и Де Борст показывают, что разница между фрикционным и когезионным упрочнением наиболее четко отражается в расширении поверхности текучести в пространстве напряжений: на рисунке 6, а показаны последовательные положения поверхности текучести при использовании условия (20), тогда как рис. 6, б соответствует уравнению (23).

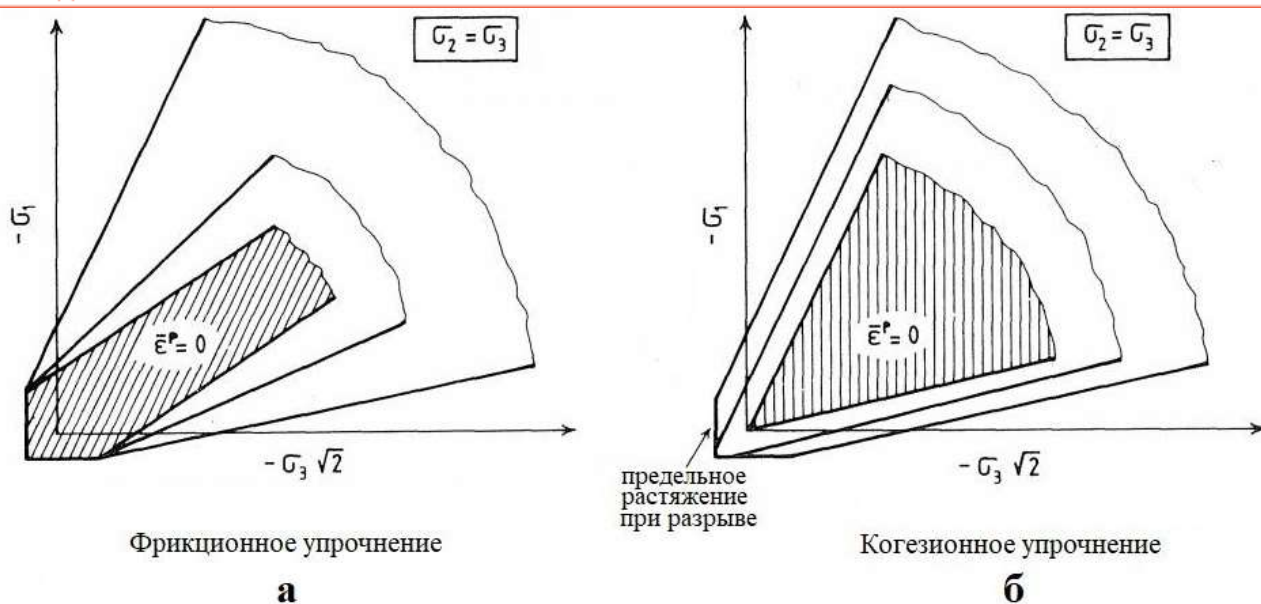
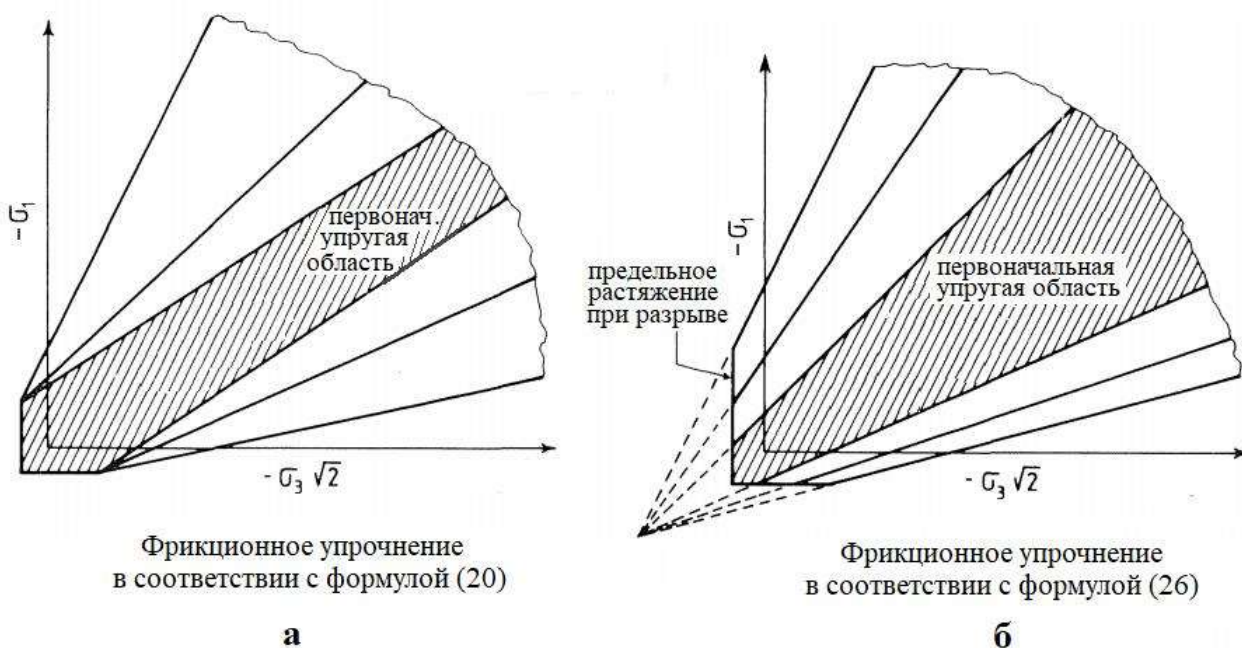


Рис. 6. Сильно различающиеся варианты расширения для упругого диапазона

Чтобы продемонстрировать, что имеется несколько слегка различающихся между собой версий фрикционного упрочнения, а не одна уникальная формула, авторы приводят следующее уравнение в качестве альтернативы условию текучести (20):

$$\tau^* = (\sigma^* + c \cotan \phi) \sin \phi^* \quad (26)$$

Разница между двумя формулами для фрикционного упрочнения показана на рис. 7. Однако Вермеер и Де Борст отмечают, что вопрос о наилучшей формуле остается открытым и для получения ответа на него необходимо учесть большое количество эмпирических данных.



**Рис. 7.** Альтернативные варианты фрикционного упрочнения

*Продолжение обзора работы Вермеера и Де Борста [5] будет приведено в следующей части.*

**Список литературы**

1. Обзор работы Вермеера и Де Борста о неассоциированной пластичности грунтов и бетона. Часть 1. Общее содержание // Geoinfo.ru. 17.06.2019. URL: <https://www.geoinfo.ru/product/analiticheskaya-sluzhba-geoinfo/obzor-raboty-vermeera-i-de-borsta-o-neassociirovannoj-plastichnosti-gruntov-i-betona-chast-1-obshchee-soderzhanie-40928.shtml>.
2. Обзор работы Вермеера и Де Борста о неассоциированной пластичности грунтов и бетона. Часть 2 // Geoinfo.ru. 25.06.2019. URL: <https://www.geoinfo.ru/product/analiticheskaya-sluzhba-geoinfo/obzor-raboty-vermeera-i-de-borsta-o-neassociirovannoj-plastichnosti-gruntov-i-betona-chast-2-41014.shtml>.
3. Обзор работы Вермеера и Де Борста о неассоциированной пластичности грунтов и бетона. Часть 3 // Geoinfo.ru. 08.07.2019. URL: <https://www.geoinfo.ru/product/analiticheskaya-sluzhba-geoinfo/obzor-raboty-vermeera-i-de-borsta-o-neassociirovannoj-plastichnosti-gruntov-i-betona-chast-3-41059.shtml>.
4. Обзор работы Вермеера и Де Борста о неассоциированной пластичности грунтов и бетона. Часть 4 // Geoinfo.ru. 15.06.2019. URL: <https://www.geoinfo.ru/product/analiticheskaya-sluzhba-geoinfo/obzor-raboty-vermeera-i-de-borsta-o-neassociirovannoj-plastichnosti-gruntov-i-betona-chast-4-41085.shtml>.
5. *Vermeer P.A., De Borst R.* Non-associated plasticity for soils, concrete and rock // Heron. 1984. Vol. 29. № 3. URL: <https://repository.tudelft.nl/islandora/object/uuid:4ee188ab-8ce0-4df3-adf5-9010ebfaabf0>.