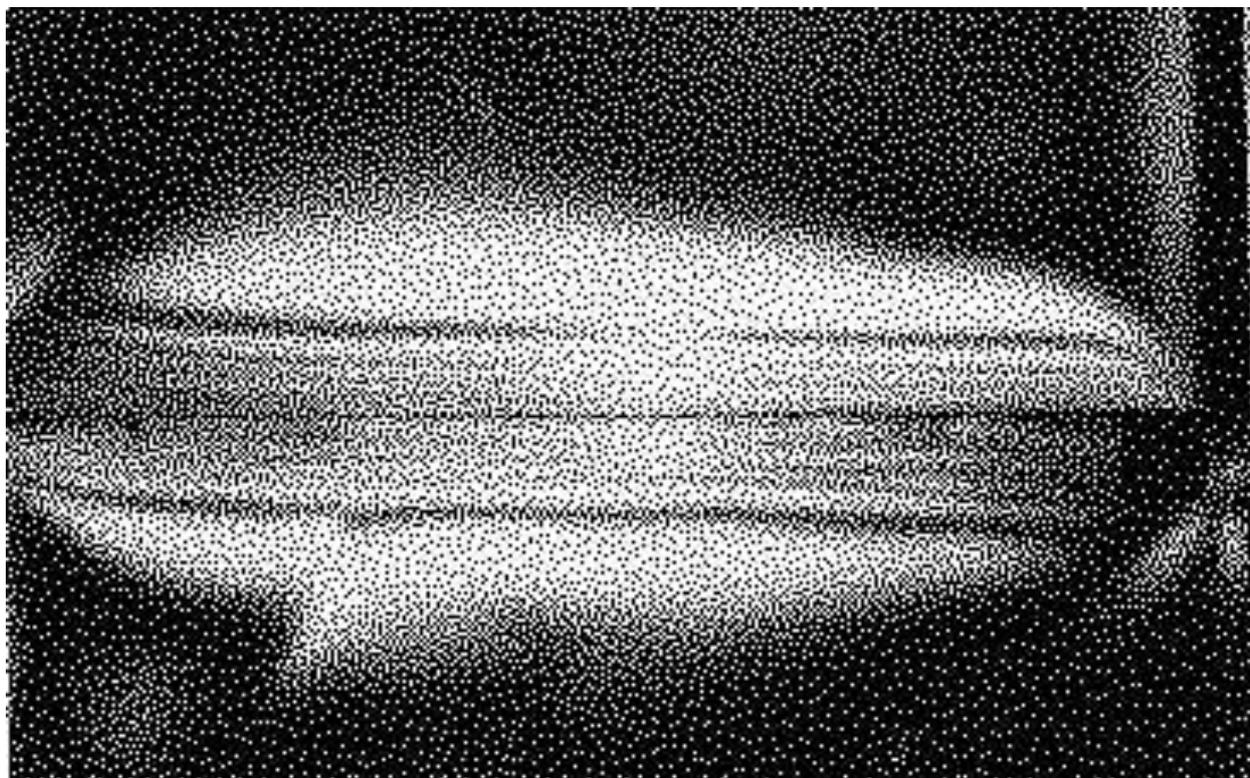


Обзор работы Вермеера и Де Борста о неассоциированной пластичности грунтов и бетона. Часть 4.



Продолжаем знакомить читателей с работой П.А. Вермеера и Р. Де Борста «Неассоциированная пластичность для дисперсных грунтов, бетона и скальных пород» [4], опубликованной в 1984 году в журнале *Heron* (Нидерланды) на английском языке. В первой части [1] мы рассмотрели ее общее содержание, во второй [2] подробнее остановились на дилатансии и трехосных испытаниях, в третьей [3] – на модели, пренебрегающей эффектами упрочнения и разупрочнения материалов (так называемой неупрочняющейся модели). Здесь речь пойдет о некоторых последствиях неассоциированной пластичности.

Аналитическая служба
info@geoinfo.ru

Численные решения задач по вдавливанию гладкой круглой пластины и круглого конуса в песок и по поведению купольной конструкции под нагрузкой, полученные Вермеером и Де Борстом в работе [4] и приведенные в части 2 нашего обзора этой работы [2], показали, что все полученные кривые «нагрузка – смещение (деформация)» имеют небольшой линейный упругий участок, а затем участок с постепенно убывающим положительным наклоном (рис. 1). Напомним, что авторы при решении этих задач идеализировали зернистый материал, принимая кривую «напряжение – деформация» для него билинейной (использованная ими основополагающая модель включала пять параметров материала: удельное сцепление c , угол внутреннего трения ϕ , модуль Юнга E , коэффициент Пуассона ν и угол дилатансии ψ).

Однако, как указывают Вермеер и Де Борст, от конкретной задачи зависит, есть ли у кривой предельная точка, в которой она имеет нулевой наклон. Такие точки обнаруживались при вдавливании плоского круглого штампа или конуса в песок (рис. 1, а, б), но не для

купольной конструкции под нагрузкой (рис. 1, в). Кривые, представленные на рис. 1, а, вроде бы говорят о некотором разупрочнении после этой точки (имеют небольшой отрицательный наклон кривой после слабо выраженного максимума), но авторы считают, что это связано с численными неточностями. Однако использование указанной модели вполне может привести к реальному разупрочнению, то есть к отрицательному наклону кривой «нагрузка – смещение», например при ее расчете для испытаний методом простого сдвига, что будет продемонстрировано на графике позже. Подобные испытания широко используются для дисперсных грунтов и иногда для бетона.

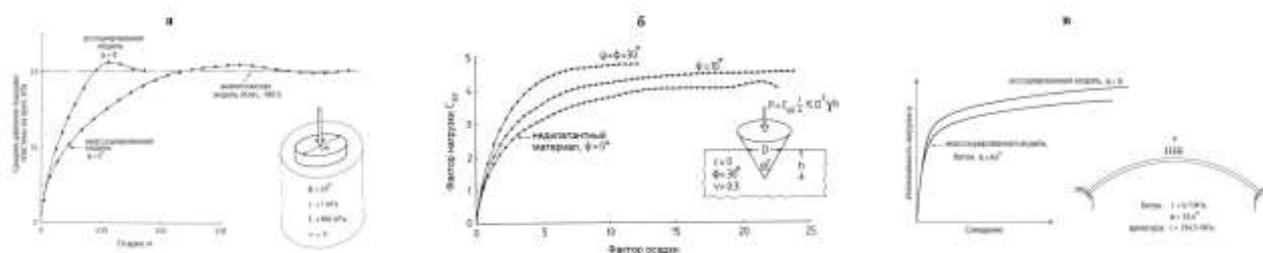


Рис. 1. Графики, построенные на основе численных решений задач по вдавливанию гладкого круглого штампа в зернистый материал (а), вдавливанию конуса в песок (б), поведению купольной конструкции под нагрузкой (в) [2, 4]

Об упрочнении и разупрочнении при испытаниях на простой сдвиг без изменений объема

Испытания в сдвиговой (срезной) коробке, рассмотренные в части 3 данного обзора [3], перестали быть популярными в качестве инструмента для фундаментальных исследований, потому что они имеют тенденцию давать неоднородные напряжения в зоне разрыва. Для получения однородных напряжений был разработан прибор для испытаний на простой сдвиг, принцип работы которого показан на рис. 2, а. Полная однородность напряжений и деформаций обычно не достигается и здесь, но Вермеер и Де Борст принимают испытания в таком приборе идеальными, то есть с полной однородностью.

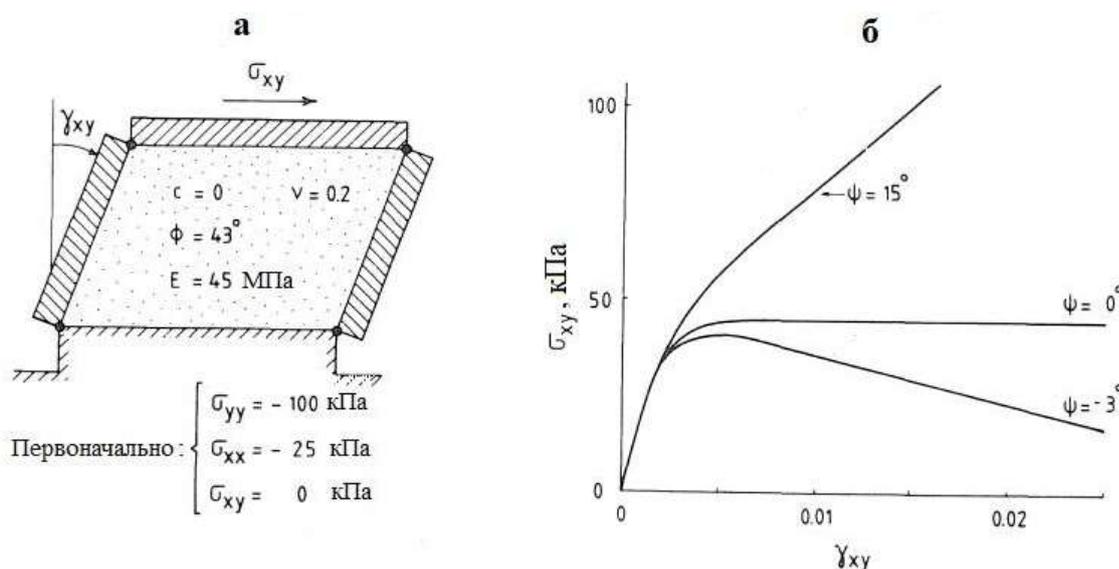


Рис. 2. Расчетное поведение песка при испытаниях на сдвиг без изменений объема [4]

Авторы отмечают, что испытания на простой сдвиг в указанном приборе получаются изохорными (без изменений объема) и рассматривают их для образца плотного песка при характеристиках, полученных на основе результатов трехосных тестов, представленных в части 2 данного обзора [2]:

$$E = 45 \text{ МПа}, \quad \nu = 0,2, \quad \phi = 43^\circ, \quad c = 0. \quad (1)$$

Для исходного напряженного состояния в образце авторы приняли следующие величины напряжений:

$$\underline{\sigma}_{yy} = -100 \text{ кПа}, \quad \underline{\sigma}_{xx} = \underline{\sigma}_{zz} = -25 \text{ кПа}, \quad \underline{\sigma}_{xy} = 0. \quad (2)$$

Во время испытания все скорости деформации исчезают, за исключением скорости деформации сдвига, поэтому представленное в части 3 [3] уравнение

$$g = \tau^* - \sigma^* \sin \psi + \text{const} \quad (3)$$

дает следующую формулу:

$$\dot{\sigma}_{xy} = \left(D_{33} - \frac{1}{d} a_3 b_3 \right) \dot{\gamma}_{xy}. \quad (4)$$

(Напомним, что точка над символом означает производную по времени, то есть скорость изменения параметра.)

Численное интегрирование уравнения (3) дает кривые, показанные на рис. 2, б. Верхняя кривая получена для угла дилатансии $\psi = 15$ град. Несмотря на использование модели, не учитывающей упрочнение или разупрочнение, эта кривая показывает упрочнение. Действительно, положительный наклон кривой постепенно уменьшается, а потом становится постоянным, но остается положительным. Таким образом, идеально-упругопластические модели не обязательно охватывают предельные нагрузки. Так, для частного случая одинаковых величин угла внутреннего трения ϕ и угла дилатансии ψ предельная нагрузка при использовании таких моделей отсутствует (здесь авторы отмечают, что поведение при $\phi = \psi$, обычно называют *ассоциированной пластичностью* в отличие от *неассоциированной пластичности*, когда эти углы не равны между собой).

При отрицательном угле дилатансии получается нижняя кривая «напряжение – деформация» на рис. 2, б. Эта кривая после первого участка постепенно изгибается и становится линией с отрицательным наклоном. Другими словами, после упрочнения следует разупрочнение и во время этого нестабильного поведения сопротивление сдвигу полностью исчезает (это объясняет, например, случаи внезапного разжижения чрезвычайно рыхлых песков, имеющих слегка отрицательный угол дилатансии и встречающихся на морском побережье Нидерландов). Авторы отмечают, что расчетное разупрочнение, продемонстрированное в виде нижней кривой на рис. 2, б, несколько удивительно, поскольку использованная для построения этого графика определяющая модель основана на идеальной пластичности. Но позже Вермеер и Де Борст обещают показать, что это является «заслугой» неассоциированной пластичности.

Авторы отмечают, что в литературе по пластичности разупрочняющееся поведение рассматривается как нестабильное. На самом же деле в этом случае равновесие нестабильно при мертвой (постоянной) нагрузке, поэтому было бы точнее сказать, что оно «потенциально

нестабильно». Но все-таки Вермеер и Де Борст признают, что любое разупрочнение действительно удобно рассматривать как нестабильное поведение.

Чтобы лучше понять это явление, авторы предлагают рассмотреть траекторию напряжений в плоскости максимального (σ_1) и минимального (σ_3) главных напряжений для изохорного испытания на сдвиг. Эта траектория начинается на рис. 3 в точке А, в которой $\sigma_1 = -100$ кПа и $\sigma_3 = -25$ кПа.

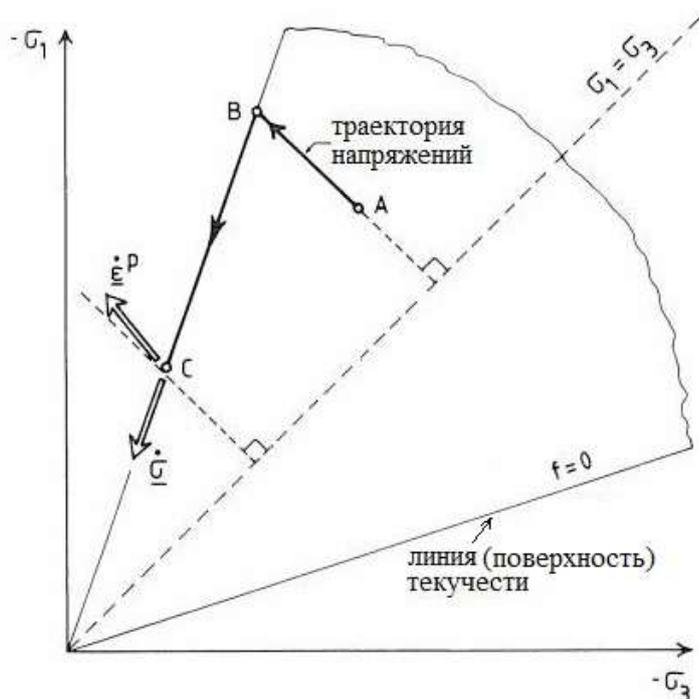


Рис. 3. Нестабильность нижней кривой на рис. 2, б объясняется отрицательностью следующих выражений [4]:
 $\dot{\sigma}^T \dot{\epsilon}^p$ и $\dot{\sigma}^T \dot{\epsilon}$ (5)

Напряжения для указанной траектории более или менее контролируются упругим изменением объема:

$$\dot{\epsilon}_v^e = \frac{E}{1-2\nu} (\dot{\sigma}_1 + \dot{\sigma}_2 + \dot{\sigma}_3) = E \frac{1+\nu}{1-2\nu} (\dot{\sigma}_1 + \dot{\sigma}_3). \quad (6)$$

Первая тождественность следует из закона Гука, а последующий вывод получается путем подстановки условия плоской деформации:

$$\dot{\sigma}_2 = \nu (\dot{\sigma}_1 + \dot{\sigma}_3). \quad (7)$$

В начале испытания деформации являются полностью упругими, что подразумевает условие нулевой объемной деформации:

$$\dot{\epsilon}_v^e = 0 \rightarrow \dot{\sigma}_1 + \dot{\sigma}_3 = 0. \quad (8)$$

Это дает траекторию упругих напряжений АВ на рис. 3.

Точка пространства напряжений В находится на поверхности текучести (для $f=0$). Начиная с этой точки развиваются пластические деформации, включая пластические изменения объема, когда угол дилатансии ψ не равен нулю. Тогда необходимо упругое изменение объема, чтобы компенсировать его пластическое изменение. Для отрицательного угла дилатансии пластическое сжатие (уменьшение объема) должно быть уравновешено упругим расширением (увеличением объема), или в соответствии с формулой:

$$\dot{\epsilon}_v^e = -\dot{\epsilon}_v^p \rightarrow \dot{\sigma}_1 + \dot{\sigma}_3 > 0. \quad (9)$$

Упругое расширение вызывает приращения растягивающих напряжений, так что существующие сжимающие напряжения в конце концов исчезают. Это видно по траектории напряжений ВС на рис. 3. Здесь вектор скорости изменения напряжений является тангенциальным (касательным) по отношению к поверхности текучести ($f=0$) и направлен к началу координат. При этом:

$$\dot{\sigma}_1 + \dot{\sigma}_3 > 0. \quad (10)$$

На рисунке 3 авторы также показали вектор скорости пластической деформации, который образует тупой угол с вектором скорости изменения напряжений. Как следствие, скалярное произведение векторов отрицательно, то есть соответствует формуле:

$$\dot{\sigma}^T \dot{\epsilon}^p < 0. \quad (11)$$

Отрицательность вышеуказанного скалярного произведения является необходимым, но не достаточным условием для разупрочняющегося поведения. Для такого поведения нужно рассмотреть скалярное произведение векторов скорости изменения напряжений и скорости общей деформации, а не скорости пластической деформации. На рисунке 3 вектор скорости общей деформации всегда параллелен линии АВ и образует тупой угол с вектором скорости изменения напряжений. Наконец, авторы отмечают, что разупрочнение возможно не только для отрицательного угла дилатансии ($\psi < 0$), но в более общем случае – когда угол дилатансии меньше угла внутреннего трения ($\psi < \varphi$).

О случае, когда угол дилатансии меньше угла внутреннего трения ($\psi < \varphi$)

Авторы напоминают, что в теории ассоциированной пластичности стабильность материала обеспечивается постулатом Друкера, а нестабильные траектории напряжений исключаются при допущении скорости пластической деформации, которая является нормальной к поверхности текучести. Для зернистого материала это может быть достигнуто путем принятия равенства между углом внутреннего трения и углом дилатансии ($\varphi = \psi$) но это не наблюдается ни при трехосных испытаниях, ни при испытаниях на сдвиг. Кроме того, эта идея должна быть отвергнута с теоретической точки зрения.

Рассеянная энергия при испытании, например на сдвиг, для материального элемента единичного объема:

$$W = \int_0^t \dot{\sigma}^T \dot{\epsilon} dt. \quad (12)$$

Теоретически обоснованная модель должна быть такой, чтобы рассеянная энергия была неотрицательной для любого возможного цикла нагружения и разгрузки, иначе материал

будет «производить» энергию. Для рассматриваемой модели это подразумевает неотрицательное интегрируемое выражение.

Для несвязного дисперсного материала можно показать, что:

$$W \geq 0 \rightarrow \sigma^T \dot{\epsilon} \geq 0 \rightarrow \phi \geq \psi. \quad (13)$$

Вместо того чтобы подробно доказывать эти неравенства, авторы демонстрируют, что при одинаковых величинах угла внутреннего трения и угла дилатансии ($\phi = \psi$) нет диссипации энергии. Эта ситуация показана на рис. 4, где скорость пластической деформации является нормальной по отношению к поверхности текучести для несвязного дисперсного материала. Тогда вектор скорости пластической деформации также является нормальным по отношению к вектору общего напряжения. Следовательно, скалярное произведение этих векторов исчезает. Поэтому при сохранении нормальности не происходит диссипация энергии:

$$\dot{W} = 0. \quad (14)$$

Поскольку пластическая деформация без рассеяния энергии немислима, приходится отказаться от ассоциированной пластичности.

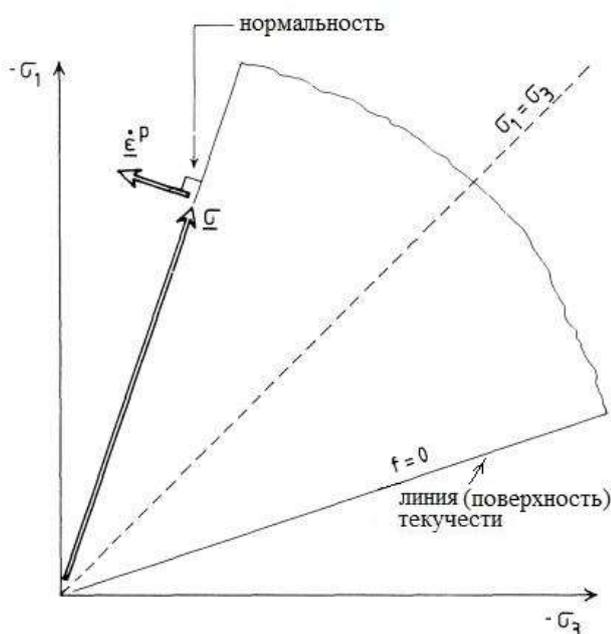


Рис. 4. Для несвязного дисперсного материала пластическое течение не может быть нормальным к поверхности текучести, так как тогда исчезает пластическая работа [4]

О неединственности предельной нагрузки

Из сказанного выше видно, что кривая «нагрузка – смещение (деформация)» может включать предельную нагрузку. В случае ассоциированной пластичности предельная нагрузка является единственной и это значение не зависит ни от напряжений перед нагружением (исходных), ни от последовательности, в которой прикладываются различные компоненты нагрузки. Однако в случае неассоциированной пластичности на предельную нагрузку могут влиять исходные напряжения и последовательность нагружения. Чтобы продемонстрировать это влияние, авторы снова рассматривают испытание на простой сдвиг, но на этот раз с допущением изменений объема.

Сначала Вермеер и Де Борст рассматривают образец в исходном состоянии «А» со следующими характеристиками:

$$\sigma_{yy} = -100 \text{ кПа}, \quad \sigma_{xx} = \sigma_{zz} = -25 \text{ кПа}, \quad \sigma_{xy} = 0. \quad (15)$$

В этом состоянии напряжения совпадают с начальными напряжениями при испытании без изменений объема, рассмотренном ранее в этой части. При испытании на стандартный (простой) сдвиг с допущением изменений объема, обсуждаемом теперь (рис. 5, а), образец подвергается сдвигу при постоянном вертикальном напряжении минус 100 кПа, а константам материала авторы присвоили такие же значения, как и при изохорном испытании. При компьютерном моделировании этого теста получилась кривая А на рис. 5, б.

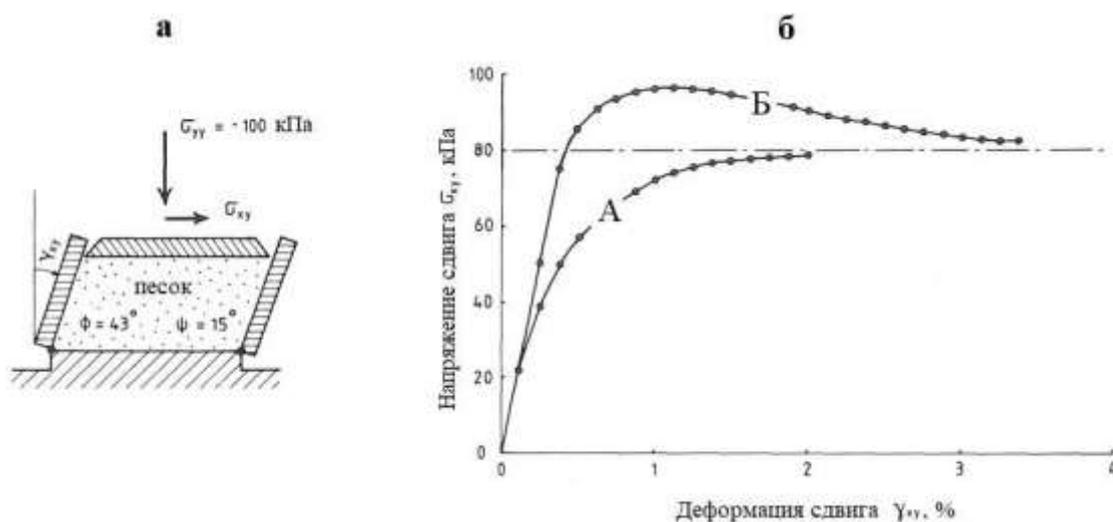


Рис. 5. Расчетное поведение песка при простом сдвиге. Предельная нагрузка зависит от начальных напряжений (по [4])

Исходное состояние образца «Б» имеет следующие характеристики:

$$\sigma_{yy} = -100 \text{ кПа}, \quad \sigma_{xx} = \sigma_{zz} = -400 \text{ кПа}, \quad \sigma_{xy} = 0. \quad (16)$$

То есть кривая Б на рис. 5, б представляет результаты компьютерного моделирования для образца с таким же постоянным вертикальным напряжением, как и в случае «А», но с гораздо более высоким начальным горизонтальным напряжением, а именно минус 400 кПа вместо минус 25 кПа. Эти начальные напряжения дают выраженный максимум на кривой с высокой предельной нагрузкой (или пиковой прочностью). Проведя целый ряд расчетов для различных начальных горизонтальных напряжений, можно найти различные предельные нагрузки. При этом остаточная прочность оказывается одинаковой.

Влияние начальных напряжений также имеет отношение к *практическим инженерным задачам*. Наглядным примером является задача с *вытягиванием из песка грунтового анкера*, как это схематично показано на рис. 6, а. Для *определения несущей способности анкера* Вермеер и Де Борст использовали модель Кулона, не учитывающую упрочнение или разупрочнение. Как и при стандартном испытании на сдвиг, разные начальные напряжения в данном случае приводят к разным предельным нагрузкам, но и здесь обнаруживается одинаковая остаточная нагрузка (рис. 6, б). Поскольку начальные напряжения редко бывают точно известны, то, как подчеркивают авторы, такие анкеры должны быть рассчитаны на

остаточную нагрузку, а не на пиковую прочность для конкретного принимаемого исходного напряженного состояния.

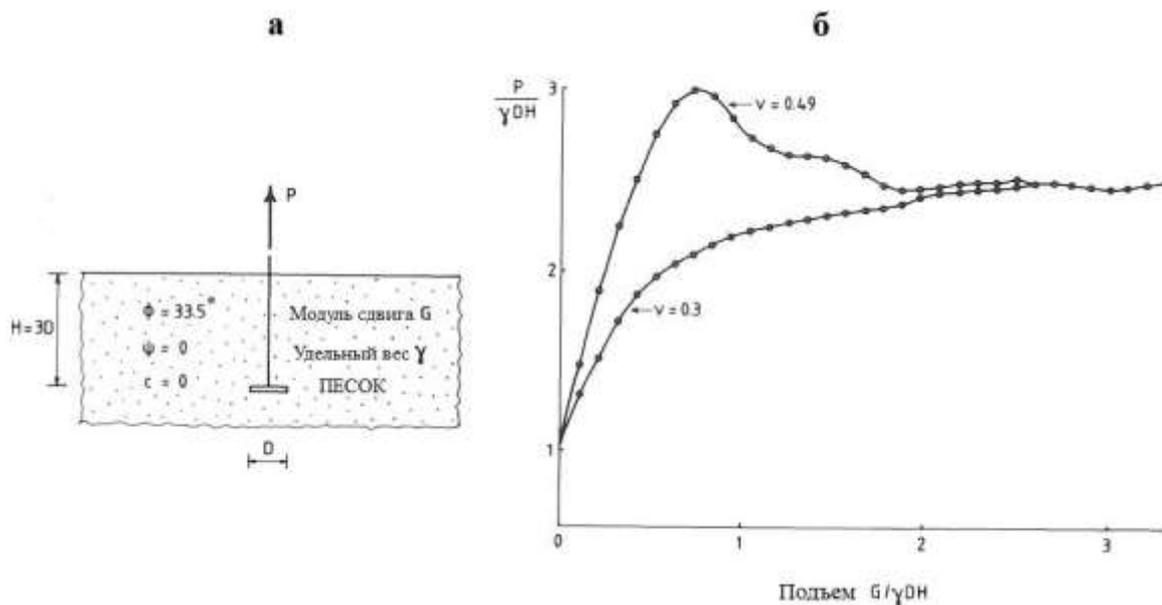


Рис. 6. Результаты конечноэлементного моделирования для анкера в песке. Предельная нагрузка зависит от коэффициента Пуассона ν

На рисунке 7 показана кривая «нагрузка – смещение (подъем)», построенная авторами на основе результатов измерений при вытягивании из песка вышеуказанного анкера. Данный график имеет хорошо выраженный пик, и это типичное поведение для заглубленной конструкции. Вермеер и Де Борст отмечают, что многие компьютерные программы не могут моделировать нестабильное послепиковое поведение и тогда вычисления приходится останавливать незадолго до достижения предельной нагрузки.

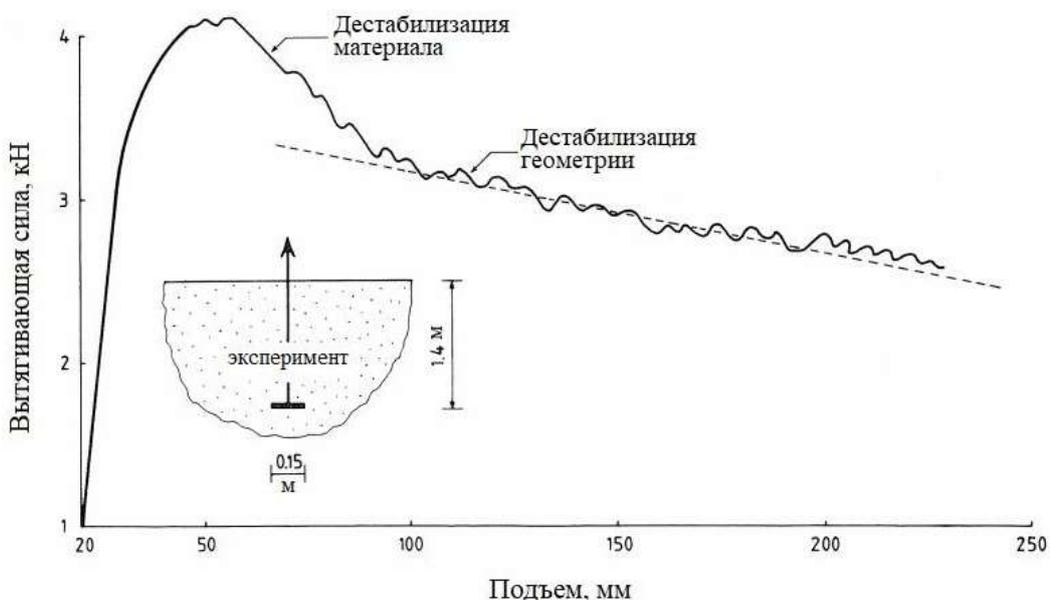


Рис. 7. Экспериментальные результаты для задачи по вытягиванию грунтового анкера из песка

Представленные примеры показывают, подчеркивают авторы, что существует необходимость вычислений за пределами предельной нагрузки вплоть до, возможно, более низкой остаточной нагрузки.

Для задач с небольшой деформацией при ассоциированной пластичности разупрочнение не происходит и предельная нагрузка совпадает с остаточной нагрузкой. Тогда в полностью пластическом диапазоне необходимость в расчетах меньше.

О геометрической дестабилизации и стабилизации

Результаты измерений на рис. 7 показывают после пика все время продолжающуюся дестабилизацию (или разупрочнение), тогда как расчетные кривые на рис. 6 имеют постоянную одинаковую предельную нагрузку. Дело в том, указывают авторы, что при вычислениях игнорируются изменения геометрии. При вытягивании анкера из грунта глубина его расположения уменьшается, так что уменьшается и его несущая способность, которая вообще исчезает, когда анкер достигает поверхности грунта. Этот эффект вызывает и линейное разупрочнение по данным измерений, показанным на рис. 7. Его называют геометрической дестабилизацией (геометрическим разупрочнением), если это является следствием изменений геометрии.

Изменения геометрии могут вызывать и стабилизацию вместо дестабилизации (упрочнение вместо разупрочнения). В качестве примера Вермеер и Де Борст рассматривают горизонтальную фундаментную плиту, вдавливаемую в дисперсное грунтовое основание. В этом случае кривая «нагрузка – смещение», построенная по данным измерений, будет показывать не предельную нагрузку, а продолжающееся упрочнение. Несущая способность при этом будет увеличиваться с деформацией из-за выпора (подъема) прилегающей к краю плиты поверхности грунта и возрастающего вдавливания в него плиты. Результаты расчетов, представленные во второй части обзора [2], которые также показаны здесь на рис. 1, а, б, этого не отражают, поскольку при обычном анализе малых деформаций изменениями геометрии пренебрегают, что делается в том числе при всех вычислениях в рассматриваемой работе [4].

Продолжение обзора работы Вермеера и Де Борста [4] будет приведено в следующей части.

Список литературы

1. Обзор работы Вермеера и Де Борста о неассоциированной пластичности грунтов и бетона. Часть 1. Общее содержание // Geoinfo.ru. 17.06.2019. URL: <https://www.geoinfo.ru/product/analiticheskaya-sluzhba-geoinfo/obzor-raboty-vermeera-i-de-borsta-o-neassociirovannoj-plastichnosti-gruntov-i-betona-chast-1-obshchee-soderzhanie-40928.shtml>.
2. Обзор работы Вермеера и Де Борста о неассоциированной пластичности грунтов и бетона. Часть 2. О дилатансии и трехосных испытаниях // Geoinfo.ru. 25.06.2019. URL: <https://www.geoinfo.ru/product/analiticheskaya-sluzhba-geoinfo/obzor-raboty-vermeera-i-de-borsta-o-neassociirovannoj-plastichnosti-gruntov-i-betona-chast-2-41014.shtml>
3. Обзор работы Вермеера и Де Борста о неассоциированной пластичности грунтов и бетона. Часть 3. Модель, пренебрегающая эффектами упрочнения или разупрочнения материала // Geoinfo.ru. 08.07.2019. URL: <https://www.geoinfo.ru/product/analiticheskaya-sluzhba-geoinfo/obzor-raboty-vermeera-i-de-borsta-o-neassociirovannoj-plastichnosti-gruntov-i-betona-chast-3-41059.shtml>
4. Vermeer P.A., De Borst R. Non-associated plasticity for soils, concrete and rock // Heron. 1984. Vol. 29. № 3. URL: <https://repository.tudelft.nl/islandora/object/uuid:4ee188ab-8ce0-4df3-adf5-9010ebfaabf0>.

Заглавное фото:

<http://www.buildcalc.ru/Learning/SoilMechanics/Open.aspx?id=Chapter3&part=5>.