

## Еще раз о модели упрочняющегося грунта HS от ее создателей и пользователей



Одной из самых универсальных механических моделей, применяемых для описания поведения оснований, сложенных многими видами дисперсных грунтов, является упругопластическая модель с изотропным упрочнением Hardening Soil Model (HSM или просто HS), или модель упрочняющегося грунта, которая была разработана в рамках классической теории пластического течения, а не теории упругости. Эта модель может быть особенно полезной при проектировании фундаментов глубокого заложения со значительными дополнительными нагрузками и сложными траекториями нагружения оснований. Ее первое подробное теоретическое описание было выполнено в 1999 году в докладе «Модель упрочняющегося грунта: разработка и верификация», сделанном на международном симпозиуме по вычислительной геотехнике ее разработчиками – профессором Веймарского международного исследовательского университета «Баухауз» Т. Шанцем (Германия), профессором Штутгартского университета П.А. Вермеером (Германия) и инженером компании PLAXIS b.v. П.Г. Бонньером (Нидерланды) [10]. Здесь мы приведем краткий обзор материалов этого доклада с пояснениями, взятыми из некоторых других работ [1–9]. Расскажем собственно о модели HS, о том, в каких случаях ее можно и нельзя применять, какие параметры грунтов требуются для работы с моделью HS и многое другое.

Аналитическая служба

Геотехническое моделирование является очень важным на всех этапах современного строительства, а также при проведении мониторинга во время эксплуатации зданий и сооружений. Многие современные строительные объекты возводятся на фундаментах глубокого заложения, занимают большую площадь и передают на свои грунтовые основания значительные нагрузки, вовлекая в это очень большие объемы грунтов. Во всех частях системы «основание – фундамент – надземная часть здания/сооружения» формируется сложное напряженно-деформированное состояние (НДС), являющееся пространственно неоднородным и изменяющееся во времени в процессе строительства и эксплуатации. Его количественная оценка на всех этапах является сложной задачей и зависит от ряда факторов, в том числе от физико-механических свойств грунтов основания в условиях естественного залегания, исходного НДС массива и изменчивости модулей деформации по глубине.

Усложняющиеся со временем строительные объекты требуют совершенствования старых и разработки новых моделей (математического отображения) механического поведения грунтов и методов численного моделирования, необходимых для расчетов при геотехническом проектировании. Современные механические модели, применяемые в программных комплексах, позволяют решать эти задачи в трехмерной постановке, определять взаимное влияние зданий/сооружений и их оснований, учитывать неоднородность инженерно-геологических условий и процессы, протекающие во времени. Однако достоверность получаемых при численном моделировании численных результатов сильно зависит от правильности выбора грунтовой модели и определения ее параметров.

Одной из самых универсальных механических моделей, применяемых для описания поведения оснований, сложенных многими видами дисперсных грунтов (особенно для зданий/сооружений с фундаментами глубокого заложения, значительными дополнительными нагрузками и сложными траекториями нагружения), является упругопластическая модель с изотропным упрочнением Hardening Soil Model (HSM), или модель упрочняющегося грунта, которая была разработана в рамках классической теории пластического течения, а не теории упругости.

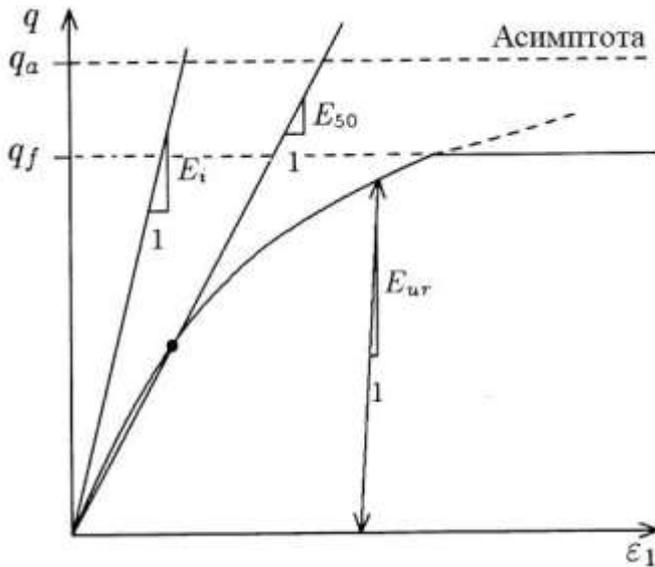
Первое подробное теоретическое описание этой модели было выполнено в 1999 году в докладе «Модель упрочняющегося грунта: разработка и верификация», сделанном на международном симпозиуме по вычислительной геотехнике ее разработчиками – профессором Веймарского международного исследовательского университета «Баухауз» Т. Шанцем (Германия), профессором Штутгартского университета П.А. Вермеером (Германия) и инженером компании PLAXIS b.v. П.Г. Бонньером (Нидерланды) [10]. Здесь мы приведем краткий обзор материалов этого доклада с пояснениями, взятыми из некоторых других работ [1–9].

Главными особенностями модели HS являются (рис. 1):

- гиперболическая зависимость между вертикальной относительной деформацией  $\epsilon_1$  и девиатором напряжений  $q = \sigma_1 - \sigma_3$  (где  $\sigma_1$ ,  $\sigma_3$  – максимальное и минимальное главные напряжения соответственно) при первичном трехосном

(девиаторном) нагружении в дренированных условиях (когда грунт показывает убывающую жесткость и одновременно развиваются необратимые пластические деформации);

- линейная зависимость между этими же параметрами при разгрузке и повторном нагружении.



**Рис. 1.** Гиперболическая зависимость между девиаторным напряжением  $q = \sigma_1 - \sigma_3$  и относительной осевой деформацией  $\epsilon_1$  при первичном нагружении в процессе стандартного испытания грунта на трехосное сжатие в дренированных условиях [10].  
Буквенные обозначения:  $E_{50}$  – секущий модуль деформации первичного нагружения при 50%-ной прочности, т.е. при 50% от предельного девиаторного напряжения  $q_f$ ;  $E_{ur}$  – модуль при разгрузке и повторном нагружении;  $q_a$  – асимптотический уровень прочности, к которому стремится зависимость;  $q_f$  – предельное девиаторное напряжение, рассчитанное по закону Кулона

Математическая формулировка модели упрочняющегося грунта использует:

- поверхность разрушения в соответствии с критерием Мора – Кулона;
- гиперболическую формулировку Дункана – Чанга для описания упругой области напряженно-деформированного состояния (с изменяемыми модулями упругости для траектории первичного нагружения и для траектории разгрузки и повторного нагружения);
- две функции текучести – для девиаторного и изотропного нагружений (для описания пластических сдвиговых и объемных деформаций)

Модель упрочняющегося грунта дает возможность моделировать нелинейность деформаций, остаточные перемещения при разгрузке и отражает переуплотнение грунтов основания с помощью коэффициента переуплотнения OCR.

HSM позволяет более достоверно описывать поведение грунтовых оснований, чем модель Мора – Кулона (последняя хорошо подходит только для описания допредельных состояний грунта, поскольку не учитывает изменения модуля деформации при изменении уровня напряжений в массиве, а также при разгрузке и повторном нагружении грунта и занижает значения дополнительных осадок фундамента).

В отличие от идеально-упругопластической модели с критерием прочности Мора – Кулона, положение поверхности текучести (границы области допустимых напряжений для сохранения упругого поведения) в модели упрочняющегося грунта не является фиксированным в пространстве главных напряжений. Ограниченное ею пространство упругого поведения может расширяться вследствие пластического деформирования. При этом модель подразумевает различие между двумя основными видами упрочнения – при сдвиге и при сжатии. Она учитывает в том числе зависимость модуля жесткости (деформации) от напряжений, поэтому все параметры жесткости в ней увеличиваются с ростом давления.

Модель упрочняющегося грунта достаточно хорошо описывает развитие сдвиговых деформаций при девиаторном нагружении и объемных деформаций при всестороннем обжатии. Она достаточно точно отражает поведение грунта при экскавации, устройстве подпорных стен и проходке туннелей, когда происходит уменьшение среднего эффективного напряжения и одновременно мобилизация сопротивления пород сдвигу. Ограничения этой модели заключаются в том, что она не очень подходит для расчетов оснований, сложенных слабыми сильносжимаемыми грунтами, непригодна для моделирования динамических процессов и не может учесть анизотропию прочности и жесткости, а также ползучести и длительной прочности. Следует также отметить, что HSM не учитывает разупрочнение грунта в результате эффектов дилатансии (изменений объема, наблюдаемых в дисперсных материалах, когда они подвергаются сдвиговым деформациям). Поэтому для высокоточного моделирования циклического нагружения требуются более сложные модели.

HSM использует три модуля деформации:

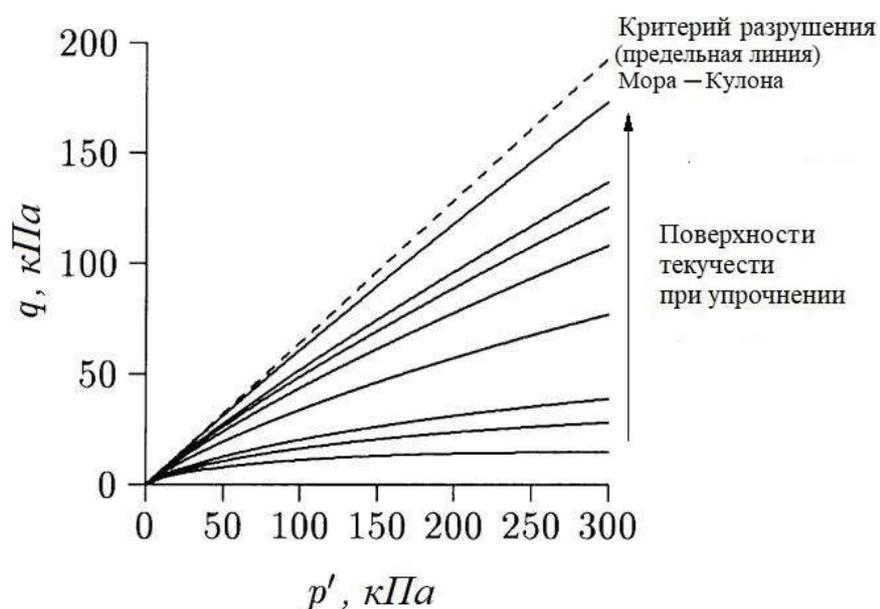
- секущий при 50%-ной прочности ( $E_{50}$ ), учитывающий жесткость при девиаторном нагружении в процессе трехосного сжатия;
- одометрический ( $E_{oed}$ ), учитывающий жесткость при всестороннем и компрессионном сжатии;
- модуль разгрузки и повторного нагружения ( $E_{ur}$ ).

При этом каждый из этих модулей меняется в зависимости от текущей величины наименьшего главного напряжения  $\sigma_3$ , которое в случае трехосных испытаний равно величине всестороннего давления.

Суммарные деформации в HSM рассчитываются с использованием зависимой от нагрузки жесткости, различной для первичного нагружения и для разгрузки и повторного нагружения. Эти пластические деформации вычисляются путем введения мультиповерхностного критерия пластичности (текучести). Принимается, что упрочнение является изотропным в зависимости как от пластического сдвига, так и от объемной деформации. Закон пластического течения принимается неассоциированным для фрикционного упрочнения при сдвиговом деформировании и ассоциированным для упрочнения на шатровой поверхности текучести в модифицированной модели Друкера – Прагера (кэп-модели – cap-model) – не зависящей от скорости нагружения упругопластической модели, которая предполагает материал однородным и изотропным.

Упрочнение при сдвиге происходит при первичном девиаторном нагружении. Оно используется для моделирования необратимых деформаций. Величины пластических деформаций, связанных с поверхностью текучести при сдвиге, в значительной степени контролируются трехосным модулем деформации  $E_{50}^{ref}$ , соответствующим эталонному всестороннему давлению, равному бытовому давлению.

Поверхности текучести в ходе сдвигового упрочнения показаны на рисунке 2. Кривые текучести по мере деформирования поднимаются до предельной кривой Мора – Кулона. Их форма зависит от показателя степени  $m$  в формуле, отражающей зависимость жесткости (модуля деформации  $E_{50}$ ) от напряжения (формула (3) в табл. 1). При  $m=1$  линии получаются прямыми, а при  $m<1$  – слегка изогнутыми.

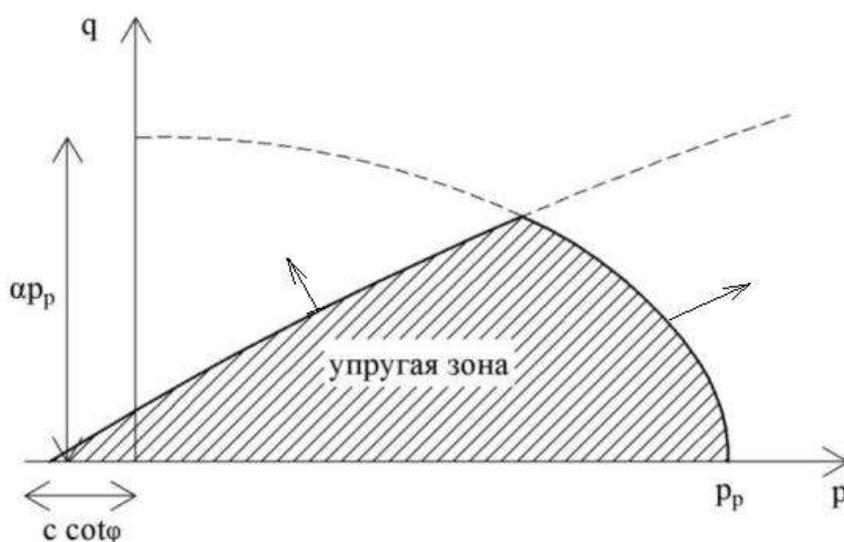


**Рис. 2.** Поверхности текучести в ходе сдвигового упрочнения твердого грунта при показателе степени  $m$  в зависимости жесткости от напряжения, равном 0,5. Значения параметра упрочнения (пластической деформации сдвига  $\gamma^p$ ) возрастают для кривых

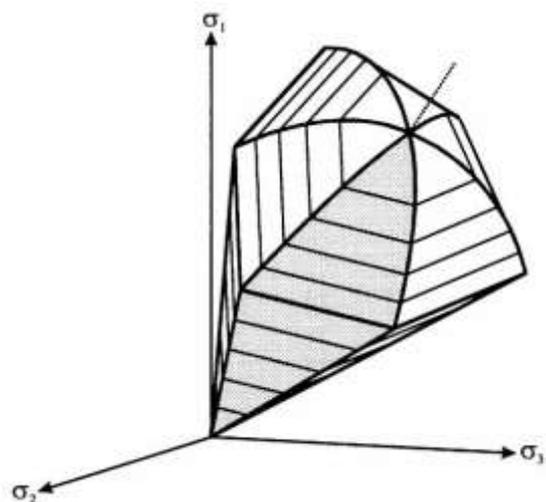
снизу-вверх. При построении таких кривых текучести нужно использовать уравнения (3), (4), (7), (8) из табл. 1 [10]

Упрочнение при сжатии можно представить в виде эллиптической поверхности текучести (называемой в разных публикациях «шатром» или «шапкой» – *cap*) (рис. 3, 4), которая характеризуется двумя параметрами – эквивалентным давлением изотропного предварительного уплотнения  $p_p$  и вспомогательным модельным параметром  $\alpha$ , принимаемым в программе Plaxis равным  $(1-\sin\varphi)$ , где  $\varphi$  – угол внутреннего трения грунта. Величины пластических деформаций, связанных с шатровой поверхностью текучести, в значительной степени контролируются одометрическим модулем деформации  $E_{oed}^{ref}$ . Увеличение «шапки» при нагружении будет сопровождаться объемной пластической деформацией и упрочнением.

На рисунке 3 заштрихована упругая зона, ограниченная поверхностью текучести при сдвиге (линия над заштрихованной областью) и поверхностью текучести при сжатии с соответствующей объемной пластической деформацией (эллиптическая линия справа от заштрихованной зоны). Стрелками показаны направления смещения этих границ при сдвиговом (сверху) и объемном (справа) упрочнении. Указанные две поверхности текучести, объединенные в одно целое, и дали возможность разработать модель с независимыми входными данными –  $E_{50}$  и  $E_{oed}$ . На рисунке 4 упругая зона, ограниченная этими поверхностями, показана в объеме.



**Рис. 3.** Упругая зона, ограниченная поверхностью текучести при сдвиге (линия над заштрихованной областью) и поверхностью текучести при сжатии с соответствующей объемной пластической деформацией (эллиптическая линия справа от заштрихованной зоны). Стрелками показаны направления смещения поверхностей текучести при сдвиговом (сверху) и объемном (справа) упрочнении [1, 10]



**Рис. 4.** Трехмерное представление суммарной поверхности текучести для модели упрочняющегося грунта в пространстве главных напряжений для несвязного грунта [10]

Модель упрочняющегося грунта записывается в виде ряда математических выражений – прежде всего основных уравнений для модулей жесткости, пластического течения (текучести), разрушения и поверхностей текучести, которые совпадают с поверхностями потенциала пластической деформации для устойчиво пластического материала (табл. 1, 2).

Модель HS можно использовать для расчетов в том числе в программном комплексе PLAXIS на основе метода конечных элементов (МКЭ).

Численное моделирование с использованием HSM по сравнению с моделью Мора – Кулона требует больше входных параметров, для определения которых помимо стандартных компрессионных испытаний необходимо выполнить трехосные испытания в консолидировано-дренированных условиях с использованием стабилометров. Об определении параметров для численного моделирования поведения дисперсных грунтов с использованием модели упрочняющегося грунта хорошо рассказано в статье [5].

Для использования этой модели необходимо задать следующие *основные параметры*:

1) *параметры прочности*:

- удельное сцепление  $c$ ;
- угол внутреннего трения  $\varphi$ ;
- угол дилатансии  $\psi$  (по умолчанию в программе Plaxis он равен нулю);

2) *параметры жесткости*:

- секущий модуль деформации (или секущий модуль жесткости, как его называют разработчики HSM [10]) при стандартном испытании грунта на трехосное сжатие в дренированных условиях  $E_{50}^{\text{ref}}$ ;
- касательный модуль деформации (или касательный модуль жесткости, как его называют разработчики HSM [10]) при первичном одометрическом нагружении  $E_{\text{oed}}^{\text{ref}}$  (в программе Plaxis по умолчанию  $E_{\text{oed}}^{\text{ref}}=E_{50}^{\text{ref}}$ );
- показатель степени  $m$  в формуле (3) в табл. 1, выражающей зависимость жесткости от уровня напряжений (в программе Plaxis по умолчанию  $m=0,5$ ).

3) дополнительные параметры:

- жесткость при разгрузке и повторном нагружении  $E_{\text{ur}}^{\text{ref}}$  (в программе Plaxis по умолчанию  $E_{\text{ur}}^{\text{ref}}=3E_{50}^{\text{ref}}$ );
- коэффициент Пуассона  $\nu_{\text{ur}}$  при разгрузке и повторном нагружении (в программе Plaxis по умолчанию он равен 0,2);
- эталонное всестороннее давление (напряжение) грунта в условиях естественного залегания  $p^{\text{ref}}$ , равное бытовому давлению (в программе Plaxis по умолчанию оно равно 100 кН/м<sup>2</sup>);
- коэффициент горизонтального напряжения при нормальной консолидации  $K_0^{\text{nc}}$  (в программе Plaxis по умолчанию он равен  $(1-\sin\phi)$ );
- коэффициент разрушения  $R_f=q_f/q_a$ , где  $q_f$  – предельное девиаторное напряжение являющееся пределом деформирования и рассчитанное по закону Кулона,  $q_a$  – асимптотический уровень прочности, к которому стремится зависимость между напряжениями и деформациями (см. рис. 1) (в программе Plaxis коэффициент  $R_f$  по умолчанию равен 0,9);
- прочность на растяжение  $\sigma_{\text{tension}}$  (в программе Plaxis она по умолчанию равна нулю).

Однако приступить к созданию модели упрочняющегося грунта можно, имея три экспериментально определенных параметра –  $c$ ,  $\phi$ ,  $E_{50}^{\text{ref}}$  (или  $E_{\text{oed}}^{\text{ref}}$ ). Как уже было отмечено выше, параметры деформируемости для HSM определяются на основе результатов консолидированно-дренированных трехосных и компрессионных испытаний.

Остальные параметры можно принять по рекомендациям разработчиков [8, 10].

Модель упрочняющегося грунта была откалибрована ее разработчиками [10] путем обратного расчета результатов трехосных и одометрических испытаний рыхлого «хостунского» песка (с начальным коэффициентом пористости  $e_0=0,89$ ), параметры которого хорошо известны и для которого имеется много доступных экспериментальных данных, поскольку он часто используется в геотехнических исследованиях. С помощью HSM и компьютерной программы Plaxis на основе МКЭ были получены численные модели испытаний на недренированный сдвиг и прессиометрических испытаний в калибровочной камере. Для обеих проверок модели экспериментальные и численные

результаты оказались довольно близкими друг к другу, что авторы работы [10] сочли очень перспективным.

С помощью такой откалиброванной модели удобно выполнять обратные расчеты результатов испытаний на недренированный сдвиг и прессиометрических тестов.

Предложенная в работе [10] модель упрочняющегося грунта оказалась весьма привлекательной для использования в повседневной геотехнической практике. С точки зрения ее авторов, дальнейшие разработки должны были бы включать расширение базы данных в поле параметров жесткости для связных грунтов, применение предложенной модели для решения краевых задач (нахождения предельных значений), в которых актуальна жесткость при малых деформациях, а также трехмерную верификацию модели. И эти разработки с момента предложения HSM активно проводятся разными авторами во всем мире.

**Таблица 1. Уравнения из работы разработчиков модели упрочняющегося грунта [10]**

Определяемый параметр	Формула	Номер формулы в работе [10]
<i>Для стандартных трехосных испытаний в дренированных условиях</i>		
Осевая деформация (см. рис. 1)	$\epsilon_1 = \frac{q_a}{2E_{50}} \frac{(\sigma_1 - \sigma_3)}{q_a - (\sigma_1 - \sigma_3)} \quad \text{для } q < q_f$	(1)
Предельное девиаторное напряжение на основе критерия разрушения Мора – Кулона (начиная с $q = q_f$ происходит пластическое течение)	$q_f = \frac{6 \sin \varphi_p}{3 - \sin \varphi_p} (p + c \cot \varphi_p)$	(2)
Асимптотический уровень прочности, к которому стремится зависимость между девиаторным напряжением и осевой деформацией	$q_a = \frac{q_f}{R_f}$	
Модуль жесткости (деформации) при первичном нагружении	$E_{50} = E_{50}^{ref} \left( \frac{\sigma_3 + c \cot \varphi_p}{\sigma^{ref} + c \cot \varphi_p} \right)^m$	(3)
Модуль жесткости (деформации) при разгрузке и повторном нагружении	$E_{ur} = E_{ur}^{ref} \left( \frac{\sigma_3 + c \cot \varphi_p}{\sigma^{ref} + c \cot \varphi_p} \right)^m$	(4)

Модуль сдвига при разгрузке и повторном нагружении	$G_{ur} = \frac{1}{2(1 + \nu_{ur})} E_{ur}, \quad \sigma^{ref} = 100 \text{ кПа}$	(5)
Относительные упругие деформации в процессе девиаторного нагружения (деформации на первой стадии изотропного сжатия не включены в формулу)	$\varepsilon_1^e = \frac{q}{E_{ur}}, \quad \varepsilon_2^e = \varepsilon_3^e = \nu_{ur} \frac{q}{E_{ur}}$	(6)
Функции текучести при девиаторном нагружении	$f_{12} = \frac{q_a}{E_{50}} \frac{(\sigma_1 - \sigma_2)}{q_a - (\sigma_1 - \sigma_2)} - \frac{2(\sigma_1 - \sigma_2)}{E_{ur}} - \gamma^p$	(7)
	$f_{13} = \frac{q_a}{E_{50}} \frac{(\sigma_1 - \sigma_3)}{q_a - (\sigma_1 - \sigma_3)} - \frac{2(\sigma_1 - \sigma_3)}{E_{ur}} - \gamma^p$	(8)
Параметр упрочнения – пластическая деформация сдвига $\gamma^p$	$\gamma^p = \varepsilon_1^p - \varepsilon_2^p - \varepsilon_3^p = 2\varepsilon_1^p - \varepsilon_v^p \approx 2\varepsilon_1^p$	(9)
Скорость объемной пластической деформации	$\dot{\varepsilon}_v^p = \sin \psi_m \dot{\gamma}^p$	(10)
Мобилизованный угол дилатансии (синус)	$\sin \psi_m = \frac{\sin \varphi_m - \sin \varphi_{cv}}{1 - \sin \varphi_m \sin \varphi_{cv}}$	(11)
Мобилизованный угол внутреннего трения (синус)	$\sin \varphi_m = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{\sigma_1 + \sigma_3 - 2c \cot \varphi_p}$	(12)
Угол дилатансии при предельном состоянии (синус)	$\sin \psi_{cv} = \frac{\sin \varphi_p - \sin \psi_p}{1 - \sin \varphi_p \sin \psi_p}$	(13)
Функции потенциала пластической деформации $g_{12}, g_{13}$	$g_{12} = (\sigma_1 - \sigma_2)/2 - (\sigma_1 + \sigma_2)/2 \cdot \sin \psi_m$ $g_{13} = (\sigma_1 - \sigma_3)/2 - (\sigma_1 + \sigma_3)/2 \cdot \sin \psi_m$	(14)
Скорость пластической деформации с использованием правила Койтера	$\dot{\varepsilon}^p = \dot{\Lambda}_{12} \frac{\partial g_{12}}{\partial \sigma} + \dot{\Lambda}_{13} \frac{\partial g_{13}}{\partial \sigma} =$ $= \dot{\Lambda}_{12} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \sin \psi \\ -\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \sin \psi \\ 0 \end{bmatrix} + \dot{\Lambda}_{13} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \sin \psi \\ 0 \\ -\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \sin \psi \end{bmatrix}$	(15)
<b>Интегрирование по времени (временная интеграция) для использования модели в программе PLAXIS с помощью метода конечных элементов</b>		

Приращение смещения $\Delta u$ , вычисляемое во время глобального итерационного процесса с помощью глобальной системы уравнений (16)	$\mathbf{K} \Delta u = \Delta \mathbf{f}_{ext} - \Delta \mathbf{f}_{int}$	(16)
Напряжение в конце приращения для данного приращения деформации $\Delta \epsilon$	$\sigma^1 = \sigma^0 + \Delta \sigma$	(17)
Приращение напряжения	$\Delta \sigma = \mathbf{D}^4 \left( \Delta \epsilon - \Delta \Lambda \frac{\partial g}{\partial \sigma} \right)$	(18)
Множитель $\Lambda$	Должен быть определен из условия, что функция $f(\sigma^1, \gamma^p) = 0$ должна быть равна нулю для нового состояния «напряжение – деформация»	
Пластическая деформация сдвига, используемая в качестве параметра упрочнения	$\gamma^p = \gamma_0^p + \Delta \gamma^p$	(19)
Предикативное (прогнозное) напряжение	$\sigma^{tr} = \sigma^0 + \mathbf{D}^4 \Delta \epsilon$	(20)
Конститутивные главные напряжения	$\sigma^1 = \sigma^{tr} - \Delta \Lambda \mathbf{b} \quad \text{при} \quad \mathbf{b} = \mathbf{D}^4 \frac{\partial g}{\partial \sigma}$	(21)
Девиаторное напряжение	$q = \sigma_1^{tr} - \sigma_3^{tr} - \Delta \Lambda (b_1 - b_3) = q^{tr} - \Delta \Lambda (b_1 - b_3)$	(22)
Асимптотическое девиаторное напряжение	$q_a = \frac{2 \sin \varphi}{1 - \sin \varphi} \frac{1}{R_f} \sigma_3^* = \frac{2 \sin \varphi}{1 - \sin \varphi} \frac{1}{R_f} (\sigma_3^{*tr} - \Delta \Lambda b_3),$	(23)
Сокращенное обозначение в формулах (22) и (23)	$\sigma_3^* = (\sigma_3 + c \cot \varphi)$	(24)
Условие для формул (22) и (23)	$f(\sigma^1) - f(\sigma^0) - \Delta \gamma^p = 0$	(25)
Конститутивные главные напряжения (индексы в формуле (26) соответствуют индексам главных напряжений, используемых для функций текучести и потенциала пластической деформации)	$\sigma^1 = \sigma^{tr} - \Delta \Lambda_{12} \mathbf{D}^4 \frac{\partial g_{12}}{\partial \sigma} - \Delta \Lambda_{13} \mathbf{D}^4 \frac{\partial g_{13}}{\partial \sigma}$ (в случае трехосного сжатия $\sigma_2 = \sigma_3$ и $\Lambda_{23} = 0$ )	(26)
<b>Шатровая поверхность текучести («шапка», см. рис. 3). Ей соответствуют нижние</b>		

<i>индексы «с»</i>		
Функция текучести для изотропного нагружения. Поверхность текучести при изотропном нагружении совпадает с поверхностью потенциала пластической деформации ( $g_c = f_c$ ), т. е. действует ассоциированный закон течения	$f_c = \frac{\bar{q}^2}{M^2} + (p + a)^2 - p_c + a)^2$ <p>где <math>a = c \cot \varphi</math></p>	(27)
Особая мера девиаторных напряжений $\bar{q}$ , в частном случае трехосного сжатия равная $(\sigma_1 - \sigma_3)$ , а для трехосного расширения равная $\alpha(\sigma_1 - \sigma_3)$	$\bar{q} = \sigma_1 + (\alpha - 1)\sigma_2 - \alpha\sigma_3$ <p>при <math>p = (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)</math>;</p> $\alpha = \frac{3 + \sin \varphi}{3 - \sin \varphi}$	(28), (29)
Функция потенциала пластической деформации $g_c$	$g_c = f_c$	(30)
Скорость объемной пластической деформации	$\dot{\epsilon}_v^p = \frac{\dot{p}}{K_c} - \frac{\dot{p}}{K_s} = \frac{1}{H} \dot{p}$	(31)
Модуль упрочнения в соответствии с уравнением (32), являющийся параметром шатровой поверхности текучести	$H = \frac{K_c}{K_s - K_c} K_s$	(32)
Скорость изменения всестороннего давления грунта для случая изотропного компрессионного сжатия ( $q=0, p=p_c$ )	$\dot{p}_c = H \dot{\epsilon}_v^p = H \dot{\lambda}_c \frac{\partial g_c}{\partial p} = 2 H \dot{\lambda}_c p$	(33)
Скорость изменения функции текучести	$\dot{f}_c = \frac{\partial f_c}{\partial \sigma} \cdot \dot{\sigma} + \frac{\partial f_c}{\partial p_c} \dot{p}_c = 0$	(34)

Множитель (коэффициент) пластичности	$\dot{\lambda}_c = \frac{H}{2(p+a)} \left( \frac{p_c + a}{\sigma^{ref} + a} \right)^m \frac{\dot{p}_c}{\sigma^{ref} + a}$	(35)
Объемная пластическая деформация при изотропном сжатии на пределе текучести (на шатровой поверхности текучести) $\epsilon_v^c$	$\epsilon_v^c = \frac{H}{m+1} \left( \frac{p_c}{\sigma^{ref}} \right)^{m+1}$	(36)
<i>Дополнительно о некоторых параметрах модели HSM</i>		
Модуль упругости Юнга при разгрузке и повторном нагружении при компрессионных испытаниях (модуль разгрузки), кПа	$E_{ur} = 2(1 + \nu_{ur}) G_{ur}$	
Одометрический модуль жесткости	$E_{oed} = E_{oed}^{ref} \left( \frac{\sigma_1 + c \cot \varphi_p}{\sigma^{ref} + c \cot \varphi_p} \right)^m$	(37)
Упругопластический модуль при нормальной консолидации	$K_0^{NC} = 1 - \sin \varphi_p$	
Мобилизованный угол дилатансии и дилатансионная «отсечка»	для $e < e_{cv}$ $\sin \psi_m = \frac{\sin \varphi_m - \sin \varphi_{cv}}{1 - \sin \varphi_m \sin \varphi_{cv}}$ ; для $e \geq e_{cv}$ $\sin \psi_m = 0$ .	(*38)
Приращение объемной относительной деформации	$\epsilon_{v0} - \epsilon_v = \ln \left( \frac{1+e}{1+e_0} \right)$	(39)

**Таблица 2. Параметры, используемые в описании модели упрочняющегося грунта из работы ее разработчиков [10]**

Обозначение параметра	Наименование параметра	Примечание
$\sigma_1$	Наибольшее главное напряжение, кПа	Компрессия принимается положительной при $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$ При дренированных трехосных испытаниях $\sigma_2 = \sigma_3 = \text{const}$
$\sigma_2$	Среднее главное напряжение, кПа	
$\sigma_3$	Наименьшее главное напряжение (боковое давление), кПа	
$q$	Девиаторное напряжение, кПа	Равно $(\sigma_1 - \sigma_3)$
$q_f$	Предельное девиаторное напряжение	Критерий текучести $q \leq q_f$

	(являющееся пределом деформирования), рассчитанное по закону Кулона, кПа	
$q_a$	Асимптотический уровень прочности, к которому стремится зависимость между напряжениями и деформациями, кПа	
$R_f$	Критерий разрушения – соотношение $q_f/q_a$ , характеризующее интенсивность разрушения, которое должно быть $<1$	В программе Plaxis по умолчанию равен 0,9
$p$	Всестороннее давление грунта, кПа	
$p'$	Эффективное всестороннее давление грунта, кПа	
$p^{ref}$	Эталонное (опорное, базовое, контрольное) всестороннее давление грунта в условиях естественного залегания, равное бытовому давлению, кПа	В программе Plaxis по умолчанию принимается равным 100 кПа
$\sigma^{ref}$	Эталонное (опорное, базовое, контрольное) наименьшее главное напряжение $\sigma_3$ в условиях естественного залегания, кПа	
$p_p$	Эквивалентное давление изотропного предварительного уплотнения, кПа	
$\alpha$	Вспомогательный модельный параметр	В программе Plaxis по умолчанию принимается равным $(1-\sin\phi)$
$\varepsilon_1$	Относительная осевая деформация, д.ед.	
$\varepsilon_1^e$ , $\varepsilon_2^e$ , $\varepsilon_3^e$	Относительные упругие деформации, соответствующие напряжениям $\sigma_1$ , $\sigma_2$ и $\sigma_3$ соответственно, д.ед.	
$\varepsilon_1^p$ , $\varepsilon_2^p$ , $\varepsilon_3^p$	Относительные пластические деформации, соответствующие напряжениям $\sigma_1$ , $\sigma_2$ и $\sigma_3$ соответственно, д.ед.	
$\varepsilon_v^p$ , $d\varepsilon_v^p$	Объемная пластическая деформация и ее приращение, д.ед.	Объемные пластические деформации никогда не будут в точности равны нулю, но для твердых грунтов они, как правило,

		малы по сравнению с осевой деформацией, поэтому ими иногда пренебрегают
$\dot{\epsilon}_v^p$	Скорость объемной пластической деформации	
$\gamma^p, d\gamma^p$	Пластическая деформация сдвига, используемая в качестве параметра упрочнения, и ее приращение, д.ед.	
$\dot{\gamma}^p$	Скорость пластической деформации сдвига	
$c$	Эффективное удельное сцепление для критерия прочности Мора – Кулона, определяемое по результатам трехосных испытаний, кПа	
$\varphi$	Эффективный угол внутреннего трения для критерия прочности Мора – Кулона, определяемый по результатам трехосных испытаний, град.	
$\varphi_{cv}$	Угол внутреннего трения при предельном состоянии, являющийся постоянной материала, не зависящей от плотности, град.	В соответствии с теорией зависимости дилатансии от напряжения: при малых соотношениях напряжений ( $\varphi_m < \varphi_{cv}$ ) материал сжимается, при высоких – имеет место дилатансия (изменение объема дисперсного материала при сдвиговой деформации)
$\varphi_m$	Мобилизованный угол внутреннего трения, град.	
$\varphi_p$	Мобилизованный угол внутреннего трения, соответствующий разрушению, град.	
$\psi$	Угол дилатансии, определяемый по результатам трехосных испытаний, град.	Является функцией времени и развивается в процессе объемной ползучести дисперсных грунтов. При начальной плотности, которая меньше критической, дисперсный грунт при сдвиге уплотняется, в противном случае – разрыхляется. Если отсутствует

		экспериментальное значение угла дилатансии, то его следует принимать равным нулю при $\psi < 30$ и равным $(\varphi - 30)$ в остальных случаях. В программе Plaxis угол дилатансии по умолчанию принимается равным нулю
$\psi_m$	Мобилизованный угол дилатансии	
$\psi_{cv}$	Угол дилатансии при предельном состоянии	
$E_{50}$	Модуль жесткости, зависящий от эффективного давления при первичном нагружении (секущий модуль деформации при 50%-ном значении предельного девиаторного напряжения $q$ ), кПа	Зависит от уровня напряженного состояния (при трехосных испытаниях грунта – от величины бокового давления $\sigma_3$ )
$E_{50}^{ref}$	Эталонный модуль жесткости (деформации), соответствующий эталонному всестороннему давлению $p^{ref}$ , равному бытовому давлению, кПа	Определяется по результатам трехосных испытаний
$E_{ur}$	Модуль разгрузки – модуль жесткости (деформации, упругости, Юнга) при разгрузке и повторном нагружении при компрессионных испытаниях, кПа	Зависит от уровня напряженного состояния (при трехосных испытаниях грунта – от величины бокового давления $\sigma_3$ )
$E_{ur}^{ref}$	Эталонный модуль разгрузки, полученный по результатам компрессионных испытаний при эталонном всестороннем давлении $p^{ref}$ , равном бытовому давлению, кПа	$2E_{50}^{ref} \leq E_{ur}^{ref} \leq 20E_{50}^{ref}$
$E_{oed}$	Одометрический модуль – компрессионный модуль деформации, учитывающий жесткость при всестороннем и компрессионном сжатии, кПа	Тангенциальный модуль упругости, определяемый по результатам компрессионных испытаний
$E_{oed}^{ref}$	Опорный компрессионный (одометрический) модуль деформации, соответствующий эталонному всестороннему давлению $p^{ref}$ , равному бытовому давлению, кПа	$0,1E_{50}^{ref} \leq E_{oed}^{ref} \leq 3E_{50}^{ref}$

$m$	Показатель степени для зависимости жесткости от уровня напряжений ( $E_{50}$ от $\sigma_3$ )	<p>Задаёт кривизну этой зависимости (см. формулу (3) и (4) в табл. 1).          Определяется по результатам компрессионных испытаний. Подбираемый параметр. Его величина не является постоянной для того или иного вида грунта, а меняется в зависимости от диапазона определения.</p> <p>Если в рассматриваемом диапазоне происходит значительное сжатие грунта, параметр <math>m</math> будет стремиться к 1.</p> <p>Если сжатие идет по линейному закону, то <math>m</math> стремится к 0 и модель вырождается до линейно-упругой.</p> <p>В программе Plaxis по умолчанию задается <math>0,5 &lt; m &lt; 1</math>.</p> <p>Чтобы смоделировать логарифмическую зависимость напряжения, которая наблюдается для мягких (пластичных) глин, этот показатель степени должен быть принят равным 1,0.</p> <p>Для <math>m=1,0</math> получаются прямые линии текучести, а для более низких значений <math>m</math> – слегка изогнутые (см. рис. 2) при линейной линии разрушения согласно формуле (2) в табл. 1.</p> <p>Экспериментальные данные по определению <math>m</math>, <math>E_{50}</math> и <math>E_{oed}</math> приведены в работе [9]</p>
$G_{ur}$	Модуль упругого сдвига при разгрузке и повторном нагружении	
$\nu_{ur}$	Коэффициент Пуассона при разгрузке и повторном нагружении	В программе Plaxis по умолчанию принимается равным 0,2
$f_{12}, f_{13}$	Функции текучести	
$g$	Функция потенциала пластической деформации	

$g_{12}, g_{13}$	Функции потенциала пластической деформации	
$K_0$	Коэффициент бокового давления грунта при консолидации	
$K_0^{NC}$	Упругопластический модуль сжатия для нормальной консолидации	
OCR	Коэффициент переуплотнения	
$\mathbf{K}$	Глобальная матрица жесткости, в которой используется упругая матрица Гука $\mathbf{D}$	
$\mathbf{f}_{ext}$	Глобальный вектор нагрузки, вытекающий из внешних нагрузок	
$\mathbf{f}_{int}$	Глобальный вектор реакции, вытекающий из напряжений	
$\Delta u$	Приращение смещения	
$\sigma^0$	Напряжение в начале приращения	
$\Delta \sigma$	Приращение напряжения	
$\sigma^1$	Напряжение в конце приращения	
$\Delta \varepsilon = B \Delta u$	Приращение относительной деформации	
$\mathbf{D}$	Матрица упругости Гука на основе жесткости при разгрузке и повторном нагружении	
$\Delta \Lambda$	Приращение неотрицательного множителя (коэффициента)	Множитель $\Lambda$ должен быть определен из условия, что функция $f(\sigma^1, \gamma^p) = 0$ для нового состояния «напряжение – деформация».
$\gamma_0^p$	Пластическая деформация сдвига в начале приращения	
$\Delta \gamma^p$	Приращение пластической деформации сдвига	
$\gamma^p$	Пластическая деформация сдвига в конце приращения	
$\sigma$	Предикативное (прогнозное)	

	напряжение	
$\sigma_3^*$	Сокращенное обозначение в формулах (22) и (23) в табл. 1	См. формулу (24) в табл. 1
$a$	Сокращенное обозначение в формуле (27) в табл. (1)	См. формулу (27) в табл. 1
$M$	Вспомогательный параметр модели, связанный с $K_0^{NC}$ и являющийся параметром шатровой поверхности текучести	См. формулу (27) в табл. 1
$H$	Модуль упрочнения, являющийся параметром шатровой поверхности текучести	См. формулу (32) в табл. 1
$K_s$	Модуль упругого набухания	
$K_c$	Упругопластический модуль сжатия	
$p_c$	Всестороннее давление грунта, относящееся к шатровой поверхности текучести	
$\varepsilon_v^c$	Объемная пластическая деформация на пределе текучести (на шатровой поверхности текучести)	
$\lambda_e$	Множитель (коэффициент) пластичности, относящийся к шатровой поверхности текучести	
$e$	Коэффициент пористости	
$e_0$	Начальный коэффициент пористости (коэффициент пористости массива грунта in situ)	
$e_{cv}$	Максимальный коэффициент пористости	

### Список литературы и других источников

1. Кудашева М.И., Калошина С.В. Сравнение модели Мора – Кулона и модели упрочняющегося грунта в программном комплексе Plaxis // Строительство и

- архитектура. Опыт и современные технологии. 2017. № 9. URL: <http://sbornikstf.pstu.ru/council/?n=&s=501>.
2. *Мирный А.Ю. и др.* Механические модели грунтов hardening soil и soft soil – области применения // Geoinfo.ru. 11.04.2017. URL: <https://www.geoinfo.ru/product/mirnyj-anatolij-yurevich/mekhanicheskie-modeli-gruntov-hardening-soil-i-soft-soil-oblasti-primeneniya-35132.shtml>.
  3. *Орехов В.В., Орехов М.В.* Использование модели упрочняющегося грунта для описания поведения песка различной плотности при нагружении // Вестник МГСУ. 2014. № 2. URL: <https://cyberleninka.ru/article/n/ispolzovanie-modeli-uprochnyayuschegosya-grunta-dlya-opisaniya-povedeniya-peska-razlichnoy-plotnosti-pri-nagruzhenii>.
  4. *Смелянский Р.И.* Математическое моделирование процессов компактирования и экструзии низкотемпературных термоэлектрических материалов: магистерская диссертация. СПб.: Изд-во Санкт-Петербургского политехнического университета, 2017.
  5. *Строкова Л.А.* Определение параметров для численного моделирования поведения грунтов // Известия Томского политехнического университета. Технология и техника геологоразведочных работ. 2008. Т. 313. № 1. URL: [https://www.lib.tpu.ru/fulltext/v/Bulletin\\_TPU/2008/v313/i1/12.pdf](https://www.lib.tpu.ru/fulltext/v/Bulletin_TPU/2008/v313/i1/12.pdf).
  6. *Тер-Мартirosян З.Г. и др.* Экспериментально-теоретические основы проектирования фундаментов глубокого заложения высотных зданий с учетом OCR и POP: презентация МГСУ // Fc-union.com. 15.06.2015. URL: <http://fc-union.com/wp-content/uploads/2015/06/Prezentatsiya-MGSU.pdf>.
  7. <http://proofoil.ru/Oilproduction/Borewell4.html>.
  8. PLAXIS. Finite element code for soil and rock analyses. Rukovodstvo pol'zovatelia. 3D Foundation Versiia 2.
  9. *Schanz T., Vermeer P.A.* On the stiffness of sands // Géotechnique. Vol. 48. P. 383–387.
  10. *Schanz T., Vermeer P.A., Bonnier P.G.* The hardening soil model: formulation and verification // Proceedings of the International Plaxis symposium “Beyond 2000 in computational geotechnics”. Rotterdam: Balkema, 1999. P. 281–296.

**Кстати, для желающих больше узнать о работе модели HS и других моделей, проводится множество курсов повышения квалификации. Мы рекомендуем курсы в геотехнической лаборатории АО «МОСТДОРГЕОТРЕСТ». Подробнее о них можно узнать на официальном сайте организации [www.mdgt.ru](http://www.mdgt.ru)**

Заглавное фото предоставлено АО «МОСТДОРГЕОТРЕСТ».